文章编号:1000-8055(2024)06-20220400-10

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20220400

## 基于 ease-off 的弧齿锥齿轮齿面高阶接触分析方法

陈 鹏,王三民,李 飞

(西北工业大学机电学院,西安710072)

**摘** 要: 为应对弧齿锥齿轮二阶接触分析方法的不足与其高阶接触理论实现的复杂问题,基于 ease-off 拓扑曲面方程与弧齿锥齿轮齿面方程的结合以及传动误差与接触迹线和 ease-off 之间的解析关系,提出以传 动比高阶导数和接触迹线短程曲率为高阶接触参数的离散齿面的高阶接触分析方法,并建立基于有限差分 的简便计算方法。结果表明,高阶齿面的传动比高阶导数波动值分别为 0.003 1、0.001 9 与 0.001,数值反映齿 面形貌的全局特性;接触线短程曲率波动值分别为 0.000 076 9、0.000 586 和 0.000 127,说明沿接触迹线的齿面 接触过程的复杂性。结果不仅验证了离散齿面高阶接触分析方法的正确性与有效性,而且说明该方法降低 了高阶接触参数的计算难度,为齿面全局设计提供了可能。

关键 词: 弧齿锥齿轮; ease-off; 高阶接触分析; 有限差分法; 全局接触问题
 中图分类号: V232.8; TH132.41
 文献标志码: A

# High-order contact analysis method of spiral bevel gear tooth surface based on ease-off

#### CHEN Peng, WANG Sanmin, LI Fei

(School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** In order to deal with the shortcomings of the second-order contact analysis method of spiral bevel gears and the complex problems of its high-order contact theory realization, based on the combination of ease-off topological surface equation and tooth surface equation of spiral bevel gears and the analytical relationship between transmission error and contact trace and ease-off, a high-order contact analysis method for discrete tooth surfaces with high-order contact parameters of high-order derivative of transmission ratio and short-range curvature of contact trace was proposed, and a simple calculation method based on finite difference was established. The results showed that the fluctuation values of the high-order derivative of the transmission ratio of the high-order tooth surface were 0.003 1, 0.001 9 and 0.001, respectively, which reflected the global characteristics of the tooth surface morphology. The short-range curvature fluctuation values of the contact line were 0.000 076 9, 0.000 586 and 0.000 127, respectively, indicating the complexity of the tooth surface contact process along the contact trace. The results not only verified the correctness and effectiveness of the discrete tooth surface high-order contact analysis method, but also showed that the method reduced the calculation difficulty of high-order contact parameters, providing the possibility for the global design of tooth surface.

**Keywords:** spiral bevel gear; ease-off; high-order contact analysis; finite difference method; global contact problems

收稿日期:2022-06-06

作者简介:陈鹏(1996-),男,博士生,主要从事齿轮设计与传动研究。E-mail: 1448962402@qq.com

引用格式:陈鹏, 王三民, 李飞. 基于 ease-off 的弧齿锥齿轮齿面高阶接触分析方法[J]. 航空动力学报, 2024, 39(6): 20220400. CHEN Peng, WANG Sanmin, LI Fei. High-order contact analysis method of spiral bevel gear tooth surface based on ease-off[J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 39(6): 20220400.

弧齿锥齿轮齿面的高阶接触能够扩大齿面的 局部特性,为齿面的全局控制提供了有力的工具, 可有效地提高弧齿锥齿轮副的运转平稳性。然而, 目前的齿面设计方法多以二阶接触为主,如 Gleason 公司以"局部共轭法"为基础,在大轮齿面 选取参考点,利用齿面共轭原理计算出小轮齿面 在参考点处的一阶、二阶接触参数<sup>[1]</sup>; Litvin 等提 出"局部综合法",以预置二阶接触参数的方式设 计齿面,通过假设规避了超定方程的求解[2-6]; Xing 等通过切齿啮合、数控加工等数学模型,补 偿数控机床与刀具误差以实现齿面的精确设计[7]; Shih 等定义了 ease-off 为齿面法向相对修形量, 提出基于 face-hobbing 加工的螺旋锥齿轮和准双 曲面齿轮的 ease-off 齿面主动修形设计方法, 建 立了 face-hobbing 加工通用数学模型<sup>[8-10]</sup>; Fan 对 ease-off的展成理论作了分析,并将其应用在弧齿 锥齿轮及准双曲面齿轮齿面接触分析(TCA)中[11]; 魏冰阳提出了 ease-off 曲面综合法, 构造了大小 轮共轭齿面的 ease-off 差曲面, 以 ease-off 密切曲 面进行了啮合仿真,获得了齿面接触区大小形状、 接触迹线方向、抛物线失配量[12]; 唐进元团队提 出了以 ease-off 修正量与几何误差等为目标的齿 面误差补偿修形设计[13-14];方宗德等提出结合 ease-off与齿面高阶传动误差的齿面修形方法,通 过齿面曲率修正建立齿面高阶传动误差设计方法, 实现齿面的精确设计[15-17]; Fong 建立了一个具有 高阶齿面修正运动的双曲面机床数学模型[18]; Stadtfeld 提出了一种简便的高阶齿表面矫正方法[19]; Fan 等提出了一种高阶齿面螺旋锥齿轮齿面误差 修正,以降低噪声[20-21]。以上齿面设计方法,均基 于二阶接触理论。为了解决高阶接触问题, 王小 椿通过啮合原理方法,理论分析了齿面的三阶接 触状态,但是没有考虑高阶切触条件,也未形成 考虑三阶接触参数的齿面设计方法,且计算难以 实现[22];刘鹄然等基于曲面高阶泰勒展开,得到齿 面的高阶切触条件,但是没有考虑高阶接触的相 关参数<sup>[23-24]</sup>; Zhu 等通过分析刀具于设计曲面之 间的关系,得到沿着特征曲线方向的高阶接触条 件[25-26];武宝林、郑刚等分析了高阶接触参数之间 的关系,对曲面高阶接触理论进行了不同方向的 应用[27-28]。

随着弧齿锥齿轮的应用越来越广泛,对齿面 传动性能的要求越来越高,基于二阶接触分析的 齿面设计方法无法保证优良的全局性能,所以齿 面高阶接触状态的准确分析显得尤为重要。齿面 高阶接触特性,如高阶传动比导数,接触迹线弯 曲程度等,对弧齿锥齿轮副的平稳性有很大的影 响。所以,为填补齿面高阶设计理论的空缺,齿 面高阶接触研究势在必行。

针对上述问题,本文提出基于微分几何<sup>[29-30]</sup>与 ease-off原理的离散弧齿锥齿轮齿面高阶接触分 析方法,建立弧齿锥齿轮离散齿面,给出了基于 ease-off的离散齿面的高阶接触参数分析计算方 法,通过并通过有限差分法进行求解计算,降低 计算难度。最后对所提出分析方法进行算例分析, 通过计算初始齿面高阶接触参数来验证方法的可 行性,并且与给出方案的计算结果进行对比来验 证高阶接触分析方法的高效性。

#### 1 离散齿面高阶接触理论

齿面的二阶几何参数可以表示为接触点处的 主曲率、主方向。对应的二阶接触参数为:大小 轮接触迹线方向、传动比一阶导数以及接触椭圆 长半轴与齿宽之比。但是二阶接触参数对于齿面 接触状态的描述有局限性,为更加详细地描述齿 面接触状态,将齿面三阶接触参数可以表示为接 触点处主曲率的导数。对应的三阶啮合特性为: 大小轮接触迹线的短程曲率,其可以表明接触迹 线的弯曲程度;大轮相对于小轮的传动比高阶导 数,其表示小周期内齿轮运动误差的大小。

#### 1.1 弧齿锥齿轮离散齿面构建

通过弧齿锥齿轮啮合关系,建立如图 1 所示的齿面共轭啮合模型。图中 $S_1(O_1-x_1y_1z_1)$ 是与小轮固连的动坐标系,绕轴线 $x_1$ 旋转,当前转角为 $\phi_1$ ; $S_2(O_2-x_2y_2z_2)$ 是与大轮固连的动坐标系,绕轴





线  $x_2$  旋转,当前转角为  $\phi_2$ ;  $S_f(O_f x_d y_{l^2 f})$  与  $S_h(O_h x_h y_h z_h)$  是静止辅助坐标系,在没有旋转时这两个 辅助坐标系与大、小轮坐标系重合。大小轮轴线  $x_2$  与  $x_1$ 之间的夹角为  $\Sigma$ ,  $\omega_1$ 和 $\omega_2$ 分别为小轮和大 轮的角速度。

根据弧齿锥齿轮齿面的加工参数与切齿转换 模型,经过一坐标变换得到弧齿锥齿轮大轮齿面 方程 $r_2 = r_2(u_2, \theta_2)$ 与法矢方程 $n_2 = n_2(u_2, \theta_2)$ ,这 里 $u_2 \pi \theta_2$ 为齿面的曲面参数。将 $r_2 = n_2 (\psi_2, \theta_2)$ ,这 标系  $S_h$ 中,得到:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{h} (u_{2}, \theta_{2}, \phi_{2}) = \mathbf{M}_{hf} \mathbf{M}_{f2} \mathbf{r}_{2} (u_{2}, \theta_{2}) \\ \mathbf{n}_{h} (u_{2}, \theta_{2}, \phi_{2}) = \mathbf{L}_{hf} \mathbf{L}_{f2} \mathbf{n}_{2} (u_{2}, \theta_{2}) \\ f (u_{2}, \theta_{2}, \phi_{2}) = \mathbf{n}_{h} \cdot \mathbf{v}_{h}^{(21)} = \mathbf{0} \end{cases}$$
(1)

式中 $M_{hf}$ 、 $M_{12}$ 是对应坐标系中的坐标转换矩阵;  $L_{hf}$ 、 $L_{12}$ 是删掉 $M_{hf}$ 、 $M_{12}$ 最后一列与最后一行得 到的转换矩阵。第三个方程为啮合方程,其中  $v_{h}^{(12)}$ 为大小轮之间的相对速度。求解得到参数  $u_{2} = u_{2}(\theta_{2}, \phi_{2})$ 。

将得到的**r**<sub>h</sub>和**n**<sub>h</sub>转换到S<sub>1</sub>坐标系中,可以得 到与小轮共轭的齿面方程:

$$\begin{cases} \boldsymbol{r}_{\rm lc}(\theta_2, \phi_2) = \boldsymbol{M}_{\rm lh} \boldsymbol{r}_{\rm h}(\theta_2, \phi_2) \\ \boldsymbol{n}_{\rm lc}(\theta_2, \phi_2) = \boldsymbol{L}_{\rm lh} \boldsymbol{n}_{\rm h}(\theta_2, \phi_2) \end{cases}$$
(2)

式中 $M_{lh}$ 为 $S_h$ 到 $S_l$ 的转换矩阵, $L_{lh}$ 为删除 $M_{lh}$ 最后一列与最后一行得到的转换矩阵。 $M_{lh}$ 表达式为:

$$\boldsymbol{M}_{1h} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_1 & -\sin \phi_1 & 0 \\ 0 & \sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(3)

式(2)所得到的齿面方程为与大轮齿面完全 共轭的齿面,是计算齿面修形的基准齿面。但共 轭齿面与小轮齿面处于绝对位置状态,需要对其 角向定位,使得齿面点一一对应,以形成 ease-off 拓扑曲面。

小轮设计齿面通过刀具到齿面一系列的坐标 转换得到, 推导出齿面方程 $r_1 = r_1(\theta_1, \phi_1)$ 和单位 法矢 $n_1 = n_1(\theta_1, \phi_1)$ 。这里 $\theta_1$ 和 $\phi_1$ 为齿面的曲面 参数。进一步定义小轮设计齿面为 $r_1 = [x_1, y_1, z_1]^T$ , 记为 $\Sigma_1$ , 与之相对应的共轭齿面记为 $\Sigma_{1c}$ , 位矢如 式(2)所示, 进一步记为 $r_{1c} = [x_{1c}, y_{1c}, z_{1c}]^T$ 。

如图 2 所示, *O*<sub>1</sub> 为节锥顶点, 取两齿面的设 计参考点 *C* 的坐标为目标点(节锥中点), 通过坐 标转换, 使小轮设计齿面和共轭齿面在参考点 *C* 



图 2 Ease-off角向定位 Fig. 2 Ease-off angle orientation

处重合在一起,可以得到两齿面在参考点*C*处相切触。定位转角的求解方程如下:

$$\begin{cases} y_1^{(C)} \cos \lambda_1 + z_1^{(C)} \sin \lambda_1 = 0\\ y_{1c}^{(C)} \cos \lambda_{1c} + z_{1c}^{(C)} \sin \lambda_{1c} = 0 \end{cases}$$
(4)

式中 $\lambda_1$ 是 $r_1$ 的定位转角;  $\lambda_{1c}$ 是 $r_{1c}$ 的定位转角。

通过坐标变换,将小轮设计齿面与共轭齿面 以及对应的单位从法矢进行角向定位;

$$\begin{cases} \tilde{\boldsymbol{r}}_{1}(\theta_{1},\phi_{1}) = \boldsymbol{M}_{1}\boldsymbol{r}_{1}(\theta_{1},\phi_{1}) \\ \tilde{\boldsymbol{n}}_{1}(\theta_{1},\phi_{1}) = \boldsymbol{L}_{1}\boldsymbol{n}_{1}(\theta_{1},\phi_{1}) \\ \tilde{\boldsymbol{r}}_{1c}(\theta_{2},\phi_{2}) = \boldsymbol{M}_{1c}\boldsymbol{r}_{1c}(\theta_{2},\phi_{2}) \\ \tilde{\boldsymbol{n}}_{1c}(\theta_{2},\phi_{2}) = \boldsymbol{L}_{1c}\boldsymbol{n}_{1c}(\theta_{2},\phi_{2}) \end{cases}$$
(5)

式中 $M_1$ 、 $M_{1c}$ 为小轮设计齿面与共轭齿面的角向 定位矩阵, $L_1$ 、 $L_{1c}$ 为删除 $M_1$ 、 $M_{1c}$ 最后一列与最 后一行得到的转换矩阵。 $M_1$ 、 $M_{1c}$ 的表达式为:

$$\boldsymbol{M}_{q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos \lambda_{q} & \sin \lambda_{q} & 0\\ 0 & -\sin \lambda_{q} & \cos \lambda_{q} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (q = 1, 1c) \quad (6)$$

结合角向定位结果, 如图 2 所示, 角向定位后 小轮共轭齿面 $\tilde{\Sigma}_{1c}$ 与小轮设计齿面 $\tilde{\Sigma}_{1}$ 之间的 easeoff 误差表示为:

$$\Delta \delta(\theta_1, \phi_1) = [\tilde{\boldsymbol{r}}_1(\theta_1, \phi_1) - \tilde{\boldsymbol{r}}_{1c}(\theta_2, \phi_2)] \cdot \\ \tilde{\boldsymbol{n}}_1(\theta_1, \phi_1)$$
(7)

对式(7)沿着投影齿面齿长 X 与齿高 Y 方向 进行曲面展开。投影方式如图 3 所示。首先,对 小轮设计齿面绕 x<sub>1</sub>轴进行旋转投影,得到位于 X<sub>m</sub>O<sub>m</sub>Y<sub>m</sub>平面的规划网格,如下式计算:

$$\begin{cases} X_{\rm m} = x_1 (\theta_1, \phi_1) \\ Y_{\rm m} = \sqrt{\left[y_1 (\theta_1, \phi_1)\right]^2 + \left[z_1 (\theta_1, \phi_1)\right]^2} \end{cases}$$
(8)





以规划网格为基准,图 3 中 $C_1$ 、 $C_{1c}$ 表示小轮 设计齿面与共轭齿面的规划网格上任意节点,对 应的位矢为 $\tilde{r}_1^{(C_1)}$ 与 $\tilde{r}_{1c}^{(C_{1c})}$ ,可以求解得任意节点处 的偏差值 $\Delta\delta_{1c}$ 。

之后,为建立沿齿长 X 与齿高 Y 方向的差曲 面方程,将X<sub>m</sub>O<sub>m</sub>Y<sub>m</sub>平面内的规划网格通过齐次矩 阵变换到XOY坐标系内,其变换方程如下:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & -X_C \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & -Y_C \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_m \\ Y_m \\ Z_m \\ 1 \end{bmatrix}$$
(9)

式中 $\beta$ 是弧齿锥齿轮的节锥角,  $(X_c, Y_c)$ 是坐标原 点  $O \propto X_m O_m Y_m$ 平面内的坐标; 且转换中网格点 位于平面内, 所以式(9)中 $Z = Z_m = 0$ 。

根据上述坐标变换,在变换后坐标系中建立 沿齿长 X 与齿高 Y 方向的差齿面方程。不同的齿 面设计方式会使得差齿面的表达式有所不同,本 文基于四阶差齿面进行分析,其曲面方程如下式:

$$\Delta \delta = a_{11} X^2 Y^2 + a_{12} X^3 Y + a_{13} X Y^3 + a_{14} X^4 + a_{15} Y^4 \quad (10)$$

式中*a*<sub>11</sub>的修形效果与*a*<sub>14</sub>、*a*<sub>15</sub>共同调节效果一致, *a*<sub>12</sub>、*a*<sub>13</sub>为高阶齿面挠率误差影响系数,*a*<sub>14</sub>表示高 阶齿长鼓形误差影响系数,*a*<sub>15</sub>表示高阶齿高鼓形 误差影响系数。对应的高阶修形拓扑曲面如图 4 所示。



图 4 Ease-off 齿面修形拓扑图 Fig. 4 Ease-off tooth surface modification topology

结合通过式(10)计算得到的 ease-off 齿面失 配量与对应的规划网格节点(*X*, *Y*),形成弧齿锥 齿轮离散失配齿面矩阵:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{e}^{11} & \boldsymbol{R}_{e}^{12} & \dots & \boldsymbol{R}_{e}^{1n} \\ \boldsymbol{R}_{e}^{21} & \boldsymbol{R}_{e}^{22} & \dots & \boldsymbol{R}_{e}^{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{R}_{e}^{m1} & \boldsymbol{R}_{e}^{m2} & \dots & \boldsymbol{R}_{e}^{mn} \end{bmatrix}$$
(11)

式中 $R_{e}^{ij} = [X_{ij}, Y_{ij}, F(X_{ij}, Y_{ij})]$ , 上标和下标ij 表示 离散齿面第i行第j列; m、n为沿齿高与齿长方 向的规划网格数目, F为齿面失配误差量。

#### 1.2 离散齿面高阶接触分析

基于离散齿面进一步分析齿面三阶参数,本 研究所述齿面三阶接触特性包括:大小轮接触迹 线的短程曲率,大轮相对于小轮的传动比高阶导数。

根据式(10),结合传动误差即从动轮实际转 角与理论转角之间的偏差的几何意义,可以得到 齿轮传动误差为:

$$\Delta\phi_2 = \frac{N_1 \Delta\delta}{N_2} = \frac{N_1 F(X, Y)}{N_2} \tag{12}$$

式中 $\Delta \phi_2$ 表示传动误差,  $N_1 \pi N_2$ 表示小、大轮齿数, 且记 $K = N_2/N_1$ 。

结合传动误差随着接触迹线在变化,本文沿接触迹线计算齿面高阶接触参数,接触迹线随着 小轮转角 $\phi_1$ 的变化而变化,从而X、Y均为 $\phi_1$ 的函数,即 $F = F(X(\phi_1), Y(\phi_1))$ ,从而,可以计算得到 齿面高阶接触参数之一的传动比的二阶导数为:

$$\frac{d^{2}(\Delta\phi_{2})}{(d\phi_{1})^{2}} = \frac{d^{2}\phi_{2}}{(d\phi_{1})^{2}} = \frac{1}{K} \cdot \frac{d^{2}F}{(d\phi_{1})^{2}}$$
(13)

式中,前两个等式由传动误差的定义推导而来。

$$\Delta \phi_2 = (\phi_2 - \phi_2^{(0)}) - \frac{1}{K} (\phi_1 - \phi_1^{(0)})$$
(14)

式中 $\phi_1^{(0)}$ 与 $\phi_2^{(0)}$ 是小轮与大轮的初始转角。故求

传动比二阶导数等同于求传动误差二阶导数,计 算如下:  

$$\frac{d^{2}(\Delta\phi_{2})}{(d\phi_{1})^{2}} = \frac{d^{2}\phi_{2}}{(d\phi_{1})^{2}} = \frac{1}{K} \times$$

$$\left[\frac{\partial^{2}F}{(\partial X)^{2}} \left(\frac{dX}{d\phi_{1}}\right)^{2} + 2\frac{\partial^{2}F}{\partial X\partial Y} \cdot \frac{dXdY}{(d\phi_{1})^{2}} + \frac{\partial^{2}F}{(\partial Y)^{2}} \left(\frac{dY}{d\phi_{1}}\right)^{2} + \frac{\partial F}{\partial X} \cdot \frac{d^{2}X}{(d\phi_{1})^{2}} + \frac{\partial F}{\partial Y} \cdot \frac{d^{2}Y}{(d\phi_{1})^{2}}\right]$$
(15)

结合三阶接触分析中的短程曲率的几何意义, 建立短程曲率的表达式。在图 5 中,设计齿面、 共轭齿面与 ease-off 差齿面相切于 C点,  $\pi$ 是公切 平面,同时也是规划网格所在平面,曲线 $\Gamma_1$ 为小 轮设计齿面 $\Sigma_1$ 上的接触迹线,沿着法向 $n_1 \alpha \Sigma_{1c}$ 、  $\pi$ 以及 ease-off 差曲面上进行投影,形成对应的接 触迹线 $\Gamma_{1c}$ 、 $\Gamma^*$ 与 $\Gamma_e$ 。为建立 ease-off 曲面上 $\Gamma_e$ 的 短程曲率与 $\Gamma_1$ 之间的关系,需建立 $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_{1c}$ 、 $\Gamma^*$ 与  $\Gamma_e$ 之间的关系。根据短程曲率的一个几何意义:  $\Sigma_1$ 、 $\Sigma_{1c}$ 以及 ease-off 差曲面三者在 C点处相切, 则在公切平面 $\pi$ 内的 $\Gamma^*$ 的曲率与 $\Gamma_1$ 、 $\Gamma_{1c}$ 、 $\Gamma_e$ 在点 C处的短程曲率的绝对值相等。



图 5 接触迹线的短程曲率关系 Fig. 5 The short-range curvature relation of contact traces

进一步,沿着齿面接触迹线,已知接触点 *C* 处失配值为 $F^{(C)} = F(X(\phi_1^{(C)}), Y(\phi_1^{(C)}))$ ,由式 (11),记*C*点的坐标为 $\mathbf{R}_e^{(C)} = [X(\phi_1^{(C)}), Y(\phi_1^{(C)}),$  $F^{(C)}]$ ,根据上述曲面与切面之间短程曲率的几何 意义, $\mathbf{R}_e^{(C)}$ 退化为 $\tilde{\mathbf{R}}_e^{(C)} = [X(\phi_1^{(C)}), Y(\phi_1^{(C)}), 0]$ , 结合接触点*C*在接触迹线上的任意性,可以得到 在规划网格内接触迹线方程为:

$$\tilde{R}_{e} = [X(\phi_{1}), Y(\phi_{1}), 0]$$
(16)

则计算接触迹线短程曲率如下:

$$\kappa_{\rm g} = \frac{\left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\phi^1} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 Y}{(\mathrm{d}\phi^1)^2} - \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\phi^1} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 X}{(\mathrm{d}\phi^1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\phi^1}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\phi^1}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$
(17)

如此,本文求解得出了第二个高阶接触参数。 从而,联合式(13)和式(17),形成离散齿面高阶接 触分析原理。

#### 2 离散齿面高阶接触参数求解方法

为求解式(13)和式(17),将离散齿面坐标点 序号映射在切平面内形成有限元网格序列,如 图 6 所示。离散齿面用以求解传动比二阶导数, 而切平面内有限网格序列用以求解接触迹线短程 曲率。



图 6 离散齿面高阶接触参数求解网格



首先求解传动比高阶导数,由于式(13)中的 F在计算中已知,如式(10)所示,从而式(13)中的 偏微分项数值在离散齿面每点处可以利用数值方 法计算得到,将计算结果记为如下形式:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} = A \\ \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} = B \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} = \tilde{C} \\ \frac{\partial F}{\partial X} = D \\ \frac{\partial F}{\partial Y} = E \end{cases}$$
(18)

从而原偏微分方程转化为二阶微分方程, 可以通过对离散求解域进行有限差分进行计算, 如图 6 所示,将离散点阵 *M* 作为求解域,设置求 解步长,其与齿面离散程度和接触点个数相关, 本文设置步长为*h* = 2π / (*NN*<sub>1</sub>),其中 *N* 为接触 点个数。

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}^{2}\phi_{2}}{(\mathrm{d}\phi_{1})^{-2}} \end{bmatrix}_{ij} = \frac{1}{K} \times \left\{ A_{ij} \left( \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\phi_{1}} \right)_{ij}^{2} + 2\tilde{C}_{ij} \left( \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\phi_{1}} \cdot \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\phi_{1}} \right)_{ij} + B_{ij} \left( \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}\phi_{1}} \right)_{ij}^{2} + D_{ij} \left[ \frac{\mathrm{d}^{2}X}{(\mathrm{d}\phi_{1})^{2}} \right]_{ij} + E_{ij} \left[ \frac{\mathrm{d}^{2}Y}{(\mathrm{d}\phi_{1})^{2}} \right]_{ij} \right\}$$

$$(19)$$

式中

$$\begin{cases} \left(\frac{dX}{d\phi_{1}}\right)_{ij} = \frac{X_{i+1,j+1} - X_{i-1,j-1}}{2h} \\ \left(\frac{dY}{d\phi_{1}}\right)_{ij} = \frac{Y_{i+1,j+1} - Y_{i-1,j-1}}{2h} \\ \left(\frac{d^{2}X}{d\phi_{1}^{2}}\right)_{ij} = \frac{X_{i+1,j+1} - 2X_{ij} + X_{i-1,j-1}}{h^{2}} \\ \left(\frac{d^{2}Y}{d\phi_{1}^{2}}\right)_{ij} = \frac{Y_{i+1,j+1} - 2Y_{ij} + Y_{i-1,j-1}}{h^{2}} \\ A_{ij} = 2a_{11}Y_{ij}^{2} + 6a_{12}X_{ij}Y_{ij} + 12a_{14}X_{ij}^{2} \end{cases}$$
(20)

$$\begin{split} B_{ij} &= 2a_{11}X_{ij}^2 + 6a_{13}X_{ij}Y_{ij} + 12a_{15}Y_{ij}^2 \\ \tilde{C}_{ij} &= 4a_{11}X_{ij}Y_{ij} + 3a_{13}X_{ij}^2 + 3a_{13}Y_{ij}^2 \\ D_{ij} &= 2a_{11}X_{ij}Y_{ij}^2 + 3a_{12}X_{ij}^2Y_{ij} + a_{13}Y_{ij}^3 + 4a_{14}X_{ij}^3 \\ E_{ij} &= 2a_{11}X_{ij}^2Y_{ij} + a_{12}X_{ij}^3 + 3a_{13}X_{ij}Y_{ij}^2 + 4a_{15}Y_{ij}^3 \\ \end{split}$$

$$(21)$$

式中 $X_{i-1,j-1}$ 、 $Y_{i-1,j-1}$ 为 $R_{e}^{(i-1)(j-1)}$ 的横纵坐标,同理  $X_{ij}$ 、 $Y_{ij}$ 和 $X_{i+1,j+1}$ 、 $Y_{i+1,j+1}$ 分别为 $R_{e}^{i}$ 和 $R_{e}^{(i+1)(j+1)}$ 的 横纵坐标。解出式(13),即求解得到传动比二阶 导数。

同理,将式(20)带入到式(17)中,可以求解得 到接触迹线的短程曲率。

#### 3 离散齿面高阶接触参数求解方法

以某直升机传动中的弧齿锥齿轮工作齿面为 例,进行离散齿面拓扑变换与高阶接触分析,表1 为齿轮副基本参数,表2为小轮工作面切齿参数。

图 7 为初始齿面的失配形貌、离散齿面接触 分析结果与高阶接触参数的计算结果,其中图 7(a) 为齿面形貌,可以看出初始齿面为二阶齿面,最 大修形量为 11.21 μm;图 7(d)、图 7(e)为齿面沿 着接触迹线的高阶接触参数,图 7(c)为传动误差 曲线,从形状上来看其为二次曲线,但是对比图 7(d) 的传动比(传动误差)二阶导数曲线来看,实际的 齿面传动过程中传动误差并非按照二阶状态来运 行接触,且最大波动为 0.000 9;同时,对比图 7(b)

表 1 齿轮副基本参数 Table 1 Basic parameters of gear

参数	数值或说明		
	小轮	大轮	
齿数	34	43	
大端模数/mm	2.0		
齿宽/mm	15		
压力角/(°)	20		
螺旋角/(°)	20		
轴交角/(°)	108		
节锥角/(°)	44.860 8	63.1392	
面锥角/(°)	49.463 7	66.035 5	
根锥角/(°)	41.964 5	58.5362	
旋向	右旋	左旋	

#### 表 2 小轮工作面切齿参数

Table 2 Pinion cutting parameters of working surface

参数	数值
刀尖半径R <sub>c</sub> /mm	44.471 3
角向刀位 $q_0$ /rad	1.082 7
径向刀位 $S_k/mm$	51.5697
滚比Ra	1.439 1
垂直轮位E/mm	-3.283 9
轴向轮位 $X_p$ /mm	-0.238 9
床位X <sub>b</sub> /mm	0.1598
安装角 $\delta_m$ /rad	0.732 4



(b) 小轮齿面接触迹线







接触迹线与图 7(e)接触迹线短程曲率可以看出,接触迹线并非光滑曲线,短程曲率有波动,最大波动为 0.000 2。

实际齿面接触时,并非按照初始预设时的接触状态接触,而是存在着更为复杂的接触状态。 通过上述高阶接触参数分析对比,可以定性与定 量地分析齿面的任意接触状态,也印证离散齿面 高阶接触分析的可行性。

为进一步验证离散齿面高阶接触分析的高效 性,本文给出三组修形参数,见表 3。

表 3 预置 ease-off 修形参数 Table 3 Preset ease-off trim parameters

参数	<i>a</i> <sub>11</sub>	<i>a</i> <sub>12</sub>	<i>a</i> <sub>13</sub>	$a_{14}$	<i>a</i> <sub>15</sub>
1	0	0.000 005	0	0.000 001 2	0.000 206 3
2	0	-0.000 005	0	0.000 001 4	0.000 206 3
3	0.000 01	0	0.000 006	0.000 001 4	0.000 206 3

图 8 给出三组修形参数对应的 ease-off 拓扑 齿面, 根据齿面形貌特征, 可以看出修形后的齿 面为高阶齿面。进一步通过离散齿面高阶接触分 析, 得到对应修形齿面的传动误差曲线, 验证了 修形齿面为高阶齿面, 如图 9~图 12 所示。

依据上述的形貌与传动误差分析,结合提出 的离散齿面高阶接触分析方法,计算对应的传动 比高阶导数与接触迹线短程曲率,并与初始齿面 的高阶接触参数进行对比,如图 13~图 15 所示。

图 13 表示初始齿面与三组修形齿面传动比 高阶导数,可以明显看出初始齿面与三组修形齿 面的区别,三组修形参数的传动比高阶导数的最 大值均为 0,这是由于修形齿面在齿面中点区域 接触充分,数值反映齿面形貌与高阶传动误差曲 线的局部特性;波动值分别为 0.003 1、0.001 9 与





Fig. 8 Three groups modified tooth surface ease-off topological surfaces(unit:  $\mu m)$ 



图 10 三组改进齿面的传动误差曲线

Fig. 10 Three groups modified tooth surface transmission error curves



#### 图 11 三组改进齿面的传动比高阶导数曲线





#### 图 12 三组改进齿面的接触迹线短程曲率曲线 Fig. 12 Three groups modified tooth surface contact trace short-range curvature curves

0.001,大波动集中于齿面边缘部位,结合齿面形 貌,这是由于边缘的大修形引起的传动误差高阶 导数波动,从而相比于初始齿面均有增加,数值 反映齿面形貌的全局特性。

图 14 是初始齿面与三组修形齿面接触迹线

对比,相比初始齿面,三组修形齿面的接触迹线 各自偏转角度为2.40°、5.63°与23.76°,结合图15 初始齿面与三组修形齿面接触迹线短程曲率结 果:三组参数的接触线短程曲率波动值分别为 0.000 0769、0.000 586 和 0.000 127,虽然数值较小,





图 13 初始齿面与三组修形齿面传动比高阶导数结果

Fig. 13 Higher order derivative results of the transmission ratio between the initial tooth surface and the three groups modified tooth surfaces



图 14 初始齿面与三组修形齿面接触迹线结果







但是能够数值反映出接触迹线并不光滑,直接表 明齿面接触过程的复杂性。

#### 结 论 4

基于 ease-off 理论, 本文提出一种弧齿锥齿轮 齿面的高阶接触分析方法,相比于以往的方法, 在计算弧齿锥齿轮的高阶接触参数上有了较大的 进步,总结如下:

1) 建立了结合 ease-off 拓扑曲面方程与离散 齿面的高阶接触参数之间的解析关系。

2) 基于 ease-off 与离散齿面, 提出的高阶接 触分析方法结合有限差分算法,有效避免了繁杂 且不易实现的高阶接触理论,计算高阶接触问题 方便且准确。

 数值算例得到了三组参数的接触线短 程曲率波动值分别为 0.000 076 9、0.000 586 和 0.000127, 说明了实际齿面接触的复杂性。进而 分析验证了该离散齿面高阶接触分析方法的可行 性与有效性,同时高阶接触分析更为直观全面的 反应齿面接触状态,为后续的高阶接触齿面设计 提供了参考。

### 参考文献:

- [1] 天津齿轮机床研究所.格利森锥齿轮技术资料译文集[M]. 北京:机械工业出版社,1982.
- [2] LITVIN F L, FUENTES A. Gear geometry and applied theory[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2004.
- [3] LITVIN F L, CUTMAN Y. A method of local synthesis of gears grounded on the connection between the principal and geodetic curvatures of surfaces[J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1981, 103(1): 114-125.
- [4] LITVIN F L, ZHANG Y, LUNDY M, et al. Determination of settings of a tilted head cutter for generation of hypoid and spiral bevel gears[J]. Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, 1988, 110(4): 495-500.
- [5] LITVIN F, LEE Hongtao. Generation and tooth contact analysis of spiral bevel gears with predesigned parabolic functions of transmission errors[R]. NASA CR4259, 1989.
- [6] LITVIN F, ZHANG Yi. Local synthesis and tooth contact analysis of face-milled spiral bevel gears[R]. NASA CR4342, 1991.
- [7] XING Yuan, WANG Taiyong. Accuracy enhancement in manufacture of spiral bevel gear with multi-axis CNC machine tools by a new compensation method[C]//2011 International Conference on Consumer Electronics, Communications and Networks. Piscataway, US: IEEE, 2011: 3891-3894.
- [8] SHIH Y P, FONG Z H. Flank modification methodology for facehobbing hypoid gears based on ease-off topography[J]. Journal of Mechanical Design, 2007, 129(12): 1294-1302.
- [9] SHIH Y P. A novel ease-off flank modification methodology for spiral bevel and hypoid gears[J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(8): 1108-1124.
- [10] SHIH Y P. Study on the flank modification of face hobbed hypoid gears[D]. Tainan, Taiwan: National Chungcheng University, 2007.
- [11] FAN Q. Ease-off and application in tooth contact analysis for facemilled and face-hobbed spiral bevel and hypoid gears[M]//Goldfarb V, Barmina N. Theory and practice of gearing and transmissions. New York: Springer, 2016: 321-339.
- [12] 魏冰阳, 邓效忠, 仝昂鑫, 等. 曲面综合法弧齿锥齿轮加工 参数计算[J]. 机械工程学报, 2016, 52(1): 20-25. WEI Bingyang, DENG Xiaozhong, TONG Angxin, et al. Surface synthesis method on generating parameters computation of spiral bevel-gears[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(1): 20-

25. (in Chinese)

- [13] DING Han, TANG Jinyuan, ZHONG Jue, et al. A hybrid modification approach of machine-tool setting considering high tooth contact performance in spiral bevel and hypoid gears[J]. Journal of Manufacturing Systems, 2016, 41: 228-238.
- [14] DING Han, TANG Jinyuan, SHAO Wen, et al. Optimal modification of tooth flank form error considering measurement and compensation of cutter geometric errors for spiral bevel and hypoid gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2017, 118: 14-31.
- [15] MU Yanming, LI Wenli, FANG Zongde, et al. A novel tooth surface modification method for spiral bevel gears with higher-order transmission error[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 126: 49-60.
- [16] 牟彦铭,方宗德,张西金.高重合度弧齿锥齿轮高阶传动误 差设计与分析[J].华中科技大学学报(自然科学版),2018, 46(7):67-72.

MU Yanming, FANG Zongde, ZHANG Xijin. Design and analysis of high-order transmission error for high contact ratio spiral bevel gears[J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2018, 46(7): 67-72. (in Chinese)

- [17] MU Yanming, FANG Zongde. An ease-off flank modification method for high contact ratio spiral bevel gears with modified curvature motion[J]. Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, 2017, 11(3): JAMDSM0034.
- [18] FONG Z H. Mathematical model of universal hypoid generator with supplemental kinematic flank correction motions[J]. Journal of Mechanical Design, 2000, 122(1): 136-142.
- [19] STADTFELD H J. Advanced bevel gear technology[M]. Rochester, US: The Gleason Works, 2000.
- [20] FAN Qi. Optimization of face cone element for spiral bevel and hypoid gears[J]. Journal of Mechanical Design, 2011, 133(9): 189-195.
- [21] FAN Qi, DAFOE R S, SWANGER J W. Higher-order tooth flank form error correction for face-milled spiral bevel and hypoid gears [J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130(7): 1029-1033.
- [22] 王小椿. 点啮合曲面的三阶接触分析[J]. 西安交通大学学

第 39 卷

报, 1983, 17(3): 4-17.

WANG Xiaochun. Third order contact analysis of point contact surfaces[J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1983, 17(3): 4-17. (in Chinese)

[23] 刘鹄然,赵东福,楼少敏,等.齿轮与齿条的2阶接触理论[J]. 现代机械,2005(5): 31-34.

LIU Huran, ZHAO Dongfu, LOU Shaomin, et al. Theory of high degree contact gear profile[J]. Modern Machinery, 2005(5): 31-34. (in Chinese)

- [24] 刘鹄然,赵东福,宋德玉.现代啮合理论[M].杭州:浙江大 学出版社,2008.
- [25] ZHU Limin, DING Han, XIONG Youlun. Third-order point contact approach for five-axis sculptured surface machining using nonball-end tools: I third-order approximation of tool envelope surface [J]. Science China Technological Sciences, 2010, 53(7): 1904-1912.
- [26] ZHU Limin, DING Han, XIONG Youlun. Third-order point contact approach for five-axis sculptured surface machining using nonball-end tools (II): tool positioning strategy[J]. Science China Technological Sciences, 2010, 53(8): 2190-2197.
- [27] 武宝林.空间共轭啮合齿面间的法曲率和短程挠率的关系及其应用[J].天津工业大学学报,2005,24(1):44-47.
  WU Baolin. Relationships between normal curvature and geodesic torsion of conjugate surfaces of gearing tooth in three dimension space and its application[J]. Journal of Tianjin Institute of Textile Science and Technology, 2005, 24(1): 44-47. (in Chinese)
- [28] 郑刚, 卢耀安, 朱利民. 三阶切触法加工自由曲面无干涉刀 位规划[J]. 上海交通大学学报, 2012, 46(2): 172-177. ZHENG Gang, LU Yaoan, ZHU Limin. Interference-free tool positioning for five-axis sculptured surface machining using third-order point contact approach[J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2012, 46(2): 172-177. (in Chinese)
- [29] DO CARMO M P. Differential geometry of curves and surfaces[M]. Englewood Cliffs, US: Prentice-Hall, 1976.
- [30] DE LEÓN M, GASET J, LAÍNZ M, et al. Higher-order contact mechanics[J]. Annals of Physics, 2021, 425: 168396.

(编辑:秦理曼)