

文章编号: 1000-8055(2026)08-20240753-18

doi: 10.13224/j.cnki.jasp.20240753

基于多元特征智能提取的涡扇发动机区间二型模糊模型建模方法研究

张陈晨, 潘慕绚

(南京航空航天大学 能源与动力学院, 南京 210016)

摘 要: 考虑涡扇发动机在包线内大范围工况变化下的强非线性、强不确定性特点, 提出一种基于多元特征智能提取的涡扇发动机全包线区间二型(IT2)模糊模型建模方法。设计并提取涡扇发动机全包线多元特征参数, 利用改进的判别邻域嵌入算法(IDNE)对多元特征参数降维处理, 并结合模糊 C 均值算法(FCM)求取典型特征, 避免传统聚类算法在高维空间失效。在典型特征点处辨识模糊规则后件变量模型。优化获得 IT2 型隶属度函数, 提高存在不确定性时模糊模型精度, 最终建立了小涵道比涡扇发动机 IT2 模糊模型。开展了全包线内模型性能验证, 结果表明 IT2 模糊模型与部件级模型输出相比, 平均方均根误差(ARMSE)小于 0.20%, 具有较高精度; 在退化等不确定性作用下, IT2 模糊模型精度变化小于 0.05%, 显著优于一型模糊模型, 具有更强的不确定性表征能力; IT2 模糊模型单次计算平均耗时为 3.9 ms, 具有良好的实时性。

关 键 词: 涡扇发动机; 区间二型模糊模型; 特征参数提取; 改进判别邻域嵌入算法; 模糊 C 均值算法
中图分类号: V233.7 **文献标志码:** A

Modeling approach for turbofan engines based on intelligent multi-feature extraction and interval type-2 fuzzy sets

Zhang Chenchen, Pan Muxuan

(College of Energy and Power Engineering,
Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: Considering turbofan engine's strong nonlinearity and significant uncertainty within wide operational ranges, a new modeling approach for turbofan engines in the full flight envelope was proposed based on multi-feature extraction and interval type-2 (IT2) fuzzy sets. The engine multi-feature parameters were designed and extracted. To avoid the failure of traditional clustering algorithms in high-dimensional spaces, an improved discriminant neighborhood embedding algorithm (IDNE) was developed for dimensionality reduction of multi-feature parameters and collaborated with the fuzzy C-means algorithm (FCM) to extract the typical features. The consequent models were identified at typical feature points. The IT2 membership functions were optimized to improve the accuracy of the fuzzy model under uncertainty. Finally, an IT2 fuzzy model for a low bypass ratio turbofan engine was established. Model performance within the flight envelope was validated. The results showed that the model had high accuracy as the average root mean square error (ARMSE) was less than 0.20%. Under degradation uncertainties, the IT2 fuzzy model's accuracy variation was less than 0.05%, significantly better than the type-1 fuzzy model, which showed a better uncertainty representation capability. The resulting model demonstrated an

收稿日期: 2024-11-05

基金项目: 国家基础研究计划重大项目(2019-V-0003-0094)

作者简介: 张陈晨(1999—), 男, 硕士, 主要从事航空发动机控制研究。E-mail: zccmail@nuaa.edu.cn

通信作者: 潘慕绚(1977—), 女, 教授, 博士, 主要从事航空发动机建模控制与智能传感器研究。E-mail: muxuan.pan@nuaa.edu.cn

引用格式: 张陈晨, 潘慕绚. 基于多元特征智能提取的涡扇发动机区间二型模糊模型建模方法研究[J]. 航空动力学报, 2026, 41(8): 20240753.

Zhang Chenchen, Pan Muxuan. Modeling approach for turbofan engines based on intelligent multi-feature extraction and interval type-2 fuzzy sets[J]. Journal of Aerospace Power, 2026, 41(8): 20240753.

excellent real-time performance with around 3.9 ms for its average computation time per instance.

Keywords: turbofan engine; interval type-2 fuzzy model; feature parameters extraction; discriminant neighborhood embedding; fuzzy C-means

符号表

ψ	前件变量	τ	作用力设计参数
M_i	第 i 条规则对应的前件区间二型模糊集合	ρ	多元参数间的距离
x	系统状态变量	λ_i	P 矩阵第 i 个列向量对应的拉格朗日乘子
u	系统控制变量	F	作用力矩阵
y	系统输出变量	S	求和后对角作用力矩阵
f_{UMF}	上隶属度函数	P^*	最优转换矩阵
f_{LMF}	下隶属度函数	s	转换前特征参数维度
f_{EFS}	嵌入 T1 模糊集	d	转换后特征参数维度
h_i	第 i 条规则的激活强度	N_C	聚类个数
$\underline{\mu}_{ji}$	第 i 条规则的第 j 个前件变量的下隶属度函数	U	隶属度矩阵
$\bar{\mu}_{ji}$	第 i 条规则的第 j 个前件变量的上隶属度函数	V	聚类中心点的集合
δ_{ji}	第 i 条规则的第 j 个前件变量的隶属度设计参数	m	模糊权重系数
H	高度	E_{SS}	误差平方和(SSE)
Ma	马赫数	θ_{Ci}	第 i 类的聚类中心点
n_H	高压转速	κ_{SC}	轮廓系数
λ_R	主导极点的实部	$\overline{E_{RMS}}$	平均方均根误差(ARMSE)
λ_I	主导极点的虚部	R_{EP}	发动机落压比(EPR)
K	系统稳态增益矩阵	W_{fb}	主燃油流量
θ	多元特征参数	A_8	尾喷口喉道面积
P	DNE 算法转换矩阵	n_L	低压转子转速
$\Delta(P)$	类内紧度	T_{43}	涡轮间总温
$\delta(P)$	类间散度	p_6	低压涡轮出口总压
f_{ij}	第 i 个和第 j 个特征参数之间的作用力	T_3	压气机出口总温

航空发动机是极其复杂、高度精密的强非线性热力系统,它的制造和使用过程中会产生各种不确定性,如性能退化、个体差异等。这些非线性和不确定性对航空发动机控制器设计提出了更高要求^[1]。先进的航空发动机控制技术依赖于发动机模型,如发动机状态监测及诊断技术、发动机在线故障诊断、先进控制算法设计等,都是以高精度、高实时性的航空发动机模型为基础开展的^[2-3]。

由于线性控制理论的完备与成熟,目前航空发动机控制工程应用中,大多基于发动机线性模型设计控制器。如 20 世纪 90 年代,研究者提出了基于偏导数法^[4]和拟合法^[5]的发动机线性模型建模方法,建立了单一稳态工作点的状态变量模型。偏导数法和基于拟合法的线性模型计算方法需要求解系统线性模型响应和系数矩阵元素的解

析关系,面对发动机全包线、大范围变化工况下的强非线性动态,单一稳态工作点线性模型难以满足控制器设计要求。学者们提出线性变参数(linear parameter varying, LPV)模型模拟对象的特性变化^[6-9]。发动机 LPV 模型建模中,需要在多个典型工作点建立对应的线性模型(多胞顶点),利用模型中系数矩阵随某一时变参数(调度参数)的线性组合,来实现全包线和工况变化时的发动机特性模拟。然而这种模型参数的线性调度,忽略了非线性系统的结构特性,尤其在发动机大范围机动时,存在强非线性与不确定性,依赖多项式等形式进行参数调度的 LPV 模型较难保证大范围非线性动态变化下的发动机模型精度。航空发动机非线性部件级模型精度高,但其求解过程需进行多次迭代,计算实时性较难保证。使用神经网络训练得到发动机的非线性模型同样可以获得

较高的模型精度^[10], 但模型离线训练过程依赖训练集, 无法应对发动机大范围变化工况中出现的的不确定性, 而在线训练神经网络模型则难以满足实时性要求。

与上述线性和非线性模型相比, Takagi-Sugeno(T-S)模糊模型能够较好平衡发动机模型精度与实时性的要求^[11]。它将非线性对象划分为若干个模糊子空间, 采用隶属度函数平滑地连接各个模糊子空间对应的局部线性模型, 获得描述非线性对象的全局模糊模型^[12]。其中基于隶属度的模糊推理能够使得 T-S 模糊模型有着以任意精度逼近非线性函数的特性^[13-15], 从而使其在表征复杂系统非线性时, 能够具有较高的精度。因此, T-S 模糊模型本质上是一类非线性模型^[16], 同时又具有结构上的“类线性”形式。模糊模型既能够有效解决航空发动机强非线性的高精度模拟, 又便于控制器设计^[17-20]。

面对发动机的动态不确定性, 模糊模型具有其内在优势。一型(type-1, T1)模糊模型能够一定程度上处理模型输入噪声的不确定性、执行机构变化引起的控制输出的不确定性、对象参数变化的不确定性, 以及外部干扰等^[21-22]。区间二型(interval type-2, IT2)模糊模型在 T1 模糊模型基础上, 通过对隶属度函数的模糊化处理, 将 T1 模糊模型中的一型模糊集合扩展为区间二型模糊集合。模糊模型由 T1 至 IT2 的拓展, 将隶属度函数由一维拓展至二维, 增强了 IT2 模糊模型不确定性处理能力, 提高了模型鲁棒性^[22-23]。

针对涡扇发动机强非线性与强不确定性, 本文提出一种基于多元特征提取^[24-25]的涡扇发动机区间二型模糊模型建模方法。首先提取发动机高维度多元特征参数, 使用改进的判别邻域嵌入(discriminant neighborhood embedding, DNE)算法^[26-31]对该多元特征参数降维后, 结合模糊 C 均值(fuzzy C-means, FCM)算法提取发动机典型特征, 在典型特征对应的工作点处辨识线性模型, 获得模糊规则数、前件变量和后件变量。进一步, 建立模型精度优化问题, 采用序列二次规划(sequential quadratic programming, SQP)算法求解获得最优隶属度函数参数。最终, 建立涡扇发动机 IT2 模糊模型。

本文工作的主要贡献如下:

1) 设计并提取了包含涡扇发动机工作环境、状态和动、稳态特性的多元特征参数, 相较于已有

的基于特征提取的发动机模糊建模方法, 既能够基于该多元特征参数获得代表发动机典型动态/稳态特性的后件变量, 又能够保证所建模糊模型在发动机工作环境和状态变化时的连续性和光滑性。

2) 提出了改进 DNE-FCM 算法, 对多元特征参数进行降维后提取发动机典型特征, 既避免了基于欧氏距离的传统聚类方法在高维空间中失效的问题, 又保证了在不损失特征信息情况下所提取典型特征的有效性。

3) 建立了某小涵道比涡扇发动机 IT2 模糊模型, 相较 T1 模糊模型, 在保证精度和实时性的同时, 提高了模型对发动机性能退化、个体差异等不确定性的表征能力, 为模型基控制方法设计、性能模拟与预测等提供机载实时模型。

1 涡扇发动机区间二型模糊模型建模思想

T-S 模糊模型主要由 IF-THEN 规则构成, 第 i 条规则可表示为

$$\begin{aligned} \text{Rule } i: & \text{ IF } \psi \text{ is } \mathbf{M}_i \\ & \text{ THEN} \\ & \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t) \\ & \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N_c$, N_c 是规则数, ψ 是前件变量, $\mathbf{M}_i$ 表示第 i 个典型特征点对应的前件区间二型模糊集合, 后件变量为线性模型, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ 为系统的状态变量, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}_m$ 为系统的控制变量, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}_q$ 为系统的输出变量, $t \in \mathbf{R}$ 为时间, $\mathbf{A}_i$ 、 $\mathbf{B}_i$ 、 $\mathbf{C}_i$ 、 $\mathbf{D}_i$ 是第 i 个典型特征点对应的状态空间模型系数矩阵。由此可见, T-S 模糊建模的关键是确定规则数、前件变量及其隶属度、后件变量状态空间模型。

图 1 为一个区间二型模糊集合 $\mathbf{M}_i$ 的示例, 图中 μ 为隶属度, x 为状态变量。图中阴影区域为 IT2 模糊集合的不确定域 (footprint of uncertainty, FOU)^[32], 由上下两个一型模糊集合包围组成。 f_{UMF} 和 f_{LMF} 分别为上隶属度函数和下隶属度函数。 f_{EFS} 为不确定区域中的一个 T1 模糊集。区间二型模糊集表示定理^[33]表明, 不确定区域是所有处于其覆盖范围内的嵌入 T1 模糊集的并集^[34]。

围绕上述模型关键参数的确定, 本文建立涡扇发动机 IT2 模糊模型建模思想和步骤如图 2 所示。首先, 确定包含涡扇发动机工作环境、状态、发动机动态和稳态特性的特征参数向量, 构建发

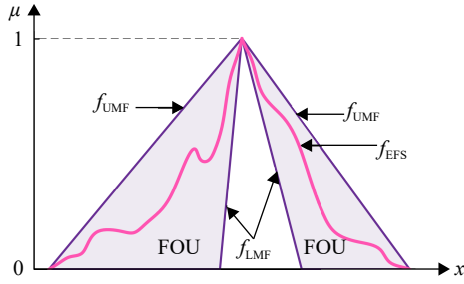


图 1 区间二型模糊集示例

Fig. 1 Example of an IT2 fuzzy set

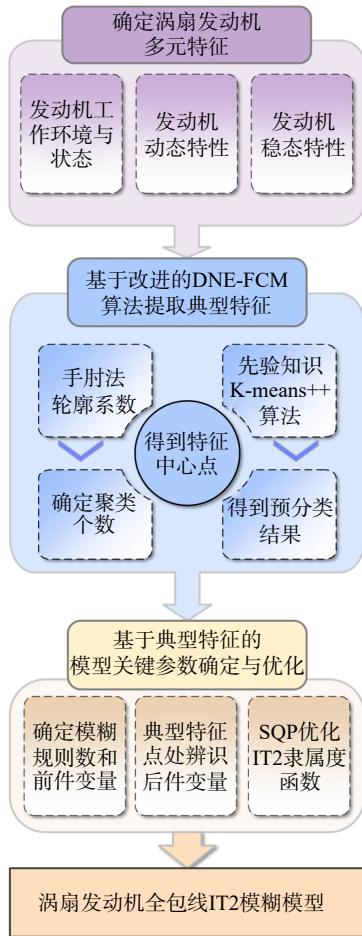


图 2 涡扇发动机 IT2 模糊模型建模思想

Fig. 2 IT2 fuzzy model modeling ideas of turbofan engine

动机多元特征参数。其次,通过多元特征参数向量聚类,提取出代表发动机典型动态和稳态特征的工作点,并以类的数量作为模糊规则数。其中,考虑到多元特征参数向量维度高,基于欧氏距离的传统聚类算法难以准确分类,提出改进 DNE-FCM 算法,通过预分类确定算法标签信息,进行高维特征参数降维和聚类。再次,在典型特征对应的工作点处,建立式(1)所示发动机线性状态变量模型,作为模糊模型的后件变量,同时选取合

适的前件变量。最后,建立模型精度优化问题,采用寻优算法获得模型精度最优下的上下隶属度函数参数,确定前件模糊集合的 FOU,这是 IT2 模糊模型的一个关键。综上,建立式(1)所示的涡扇发动机 IT2 模糊模型。

2 涡扇发动机 IT2 模糊模型建模

2.1 涡扇发动机 IT2 模糊模型总体构架

涡扇发动机 IT2 模糊模型的式(1)可进一步表示为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^{N_C} h_i [\mathbf{A}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}(t)] \\ \mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{N_C} h_i [\mathbf{C}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_i \mathbf{u}(t)] \end{cases} \quad (2)$$

式中 h_i 为第 i 条规则的激活强度,且有

$$h_i = \frac{\underline{\sigma}_i \underline{h}_i + \bar{\sigma}_i \bar{h}_i}{\sum_{i=1}^{N_C} (\underline{\sigma}_i \underline{h}_i + \bar{\sigma}_i \bar{h}_i)} \quad (3)$$

式中 $\sum_{i=1}^{N_C} h_i = 1$, $\underline{\sigma}_i$ 和 $\bar{\sigma}_i$ 为非线性函数,且满足 $\underline{\sigma}_i + \bar{\sigma}_i = 1$, $\underline{h}_i$ 和 $\bar{h}_i$ 由上下隶属度函数构成。

$$\begin{cases} \underline{h}_i = \prod_{j=1}^p \underline{\mu}_{j,i} \\ \bar{h}_i = \prod_{j=1}^p \bar{\mu}_{j,i} \end{cases} \quad (4)$$

式中 p 为前件变量的个数, $\underline{\mu}_{j,i}$ 为第 i 条规则的第 j 个前件变量的下隶属度函数, $\bar{\mu}_{j,i}$ 为对应的上隶属度函数。

本文选取高斯型隶属度函数,因而上下隶属度函数设计为

$$\begin{cases} \bar{\mu}_{j,i} = \exp \left[\frac{(\psi_j - \psi_{Ci})^2}{-2 \times \delta_{j,i}^2} \right] \\ \underline{\mu}_{j,i} = 0.9 \bar{\mu}_{j,i} \end{cases} \quad (5)$$

式中 $\delta_{j,i}$ 为第 i 条规则的第 j 个前件变量的设计参数, ψ_j 为第 j 个前件变量, ψ_{Ci} 为第 i 个典型特征点对应的前件变量参数。

2.2 涡扇发动机多元特征参数确定

涡扇发动机多元特征参数设计中,需要考虑发动机工作时在飞行包线内的位置信息、状态以及其动态和稳态特性信息。选取发动机工作高度 H 、马赫数 Ma 和高压转速 n_H 表征发动机空间位

置、功率水平,构成发动机工作点;选取每个工作点传递函数的主导极点实部及虚部表征动态特性信息;最后选取传递函数稳态增益表征稳态特性信息。

首先定义

$$\theta_1 = [H \quad Ma \quad n_H]^T \quad (6)$$

将其作为涡扇发动机多元特征参数 θ 的一个分量。

令涡扇发动机非线性数学模型为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{y} = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}_n$ 为状态, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}_m$ 为控制输入, $\mathbf{w} \in \mathbf{R}_p$ 为外界扰动, $f_1(\cdot)$ 和 $f_2(\cdot): \mathbf{R}_n \times \mathbf{R}_m \times \mathbf{R}_p \rightarrow \mathbf{R}_q$ 分别表示发动机输入输出关系的非线性函数。

在某工作点 (H, Ma, n_H) ,忽略外界扰动信息 $\mathbf{w}$,采用偏导数法线性化式(7)所示的非线性模型,得到发动机标称状态空间模型:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

式中,系统系数矩阵 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$ 为已知适维矩阵。系统式(8)的传递函数矩阵可表示为

$$\mathbf{Y}(s) = \left(\frac{1}{s\mathbf{I} - \mathbf{A}} \mathbf{C}\mathbf{A}^* \mathbf{B} + \mathbf{D} \right) \mathbf{U}(s) \quad (9)$$

式中 $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ 为矩阵 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 的行列式, $\mathbf{A}^*$ 为矩阵 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 的伴随矩阵, $\mathbf{I}$ 为单位矩阵。行列式 $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ 的根为系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值,为系统极点。因此,选取系统距虚轴最近的一个主导极点^[35]表征发动机动态特性信息。定义发动机动态特性信息 θ_2

$$\theta_2 = [\lambda_R \quad \lambda_I]^T \quad (10)$$

式中 λ_R 和 λ_I 为主导极点的实部及虚部。

由式(9)可得

$$\begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ \vdots \\ y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) & \cdots & G_{1m}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) & \cdots & G_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{q1}(s) & G_{q2}(s) & \cdots & G_{qm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \\ \vdots \\ u_m(s) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中 $y_i(s)$ 和 $u_j(s)$ 分别为 $\mathbf{Y}(s)$ 和 $\mathbf{U}(s)$ 的分量, $G_{ij}(s), 1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq m$ 为系统第 i 个输出与第 j 个输入之间的传递函数,其稳态增益为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \cdots & k_{nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{q1} & k_{q2} & \cdots & k_{qm} \end{bmatrix}_{q \times m} \quad (12)$$

式中 $k_{ij} = G_{ij}(0)$ 。

选取系统传递函数稳态增益表征发动机稳态特性信息。定义发动机稳态特性信息 θ_3

$$\theta_3 = [k_{11} \quad \cdots \quad k_{1m} \quad \cdots \quad k_{2m} \quad \cdots \quad k_{nm}]^T \quad (13)$$

由式(6)、式(10)、式(13)构建涡扇发动机多元特征参数 θ 。

$$\theta = [\theta_1^T \quad \theta_2^T \quad \theta_3^T]^T = [H \quad Ma \quad n_H \quad \lambda_R \quad \lambda_I \quad k_{11} \quad \cdots \quad k_{nm}]^T \quad (14)$$

2.3 基于改进DNE算法的多元特征参数降维方法

2.3.1 特征参数维度影响分析

在利用聚类算法对式(14)所描述的涡扇发动机多元特征参数提取典型特征时,特征参数的维度将直接影响所提取特征的有效性。低维特征参数不足以描述发动机特征,而高维特征参数采用传统聚类方法将难以获得有效的典型特征。

首先,低维特征参数不足以描述发动机多重特征,将导致特征提取的不准确。图3中工作点A($H = 16 \text{ km}$, $Ma = 1.6$, $n_H = 100\%$)和工作点B($H = 1 \text{ km}$, $Ma = 0.9$, $n_H = 76\%$)的主导极点列于表1。两点处发动机动态特性接近,但飞行包线位置差别却很大。类似地,工作点C($H = 14 \text{ km}$, $Ma = 1.6$, $n_H = 90\%$)和工作点D($H = 2 \text{ km}$, $Ma = 0.6$, $n_H = 86\%$)的稳态特征列于表2。两者稳态特性十分接近,但包线位置相距较远。若特征参数中不考虑飞行包线位置等信息,聚类算法将会把工作点A与工作点B、工作点C与工作点D归为一类,提取出不合理的典型特征。当发动机在包线内连续运行,尤其是快速机动飞行时,基于此建立的模糊模型机载情况下,将可能出现模型输出不连续、不光滑,精度低等问题。

其次,高维特征参数使得基于欧氏距离的传统聚类算法难以获得合理的典型特征点(聚类中心)^[36]。在此,以2~9维的特征参数为例,分析欧

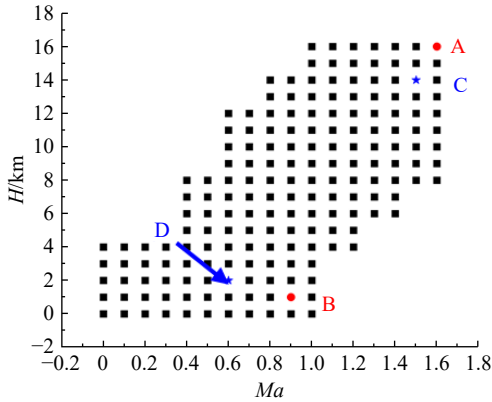


图 3 飞行包线示意图

Fig. 3 Flight envelope schematic

表 1 工作点 A 和工作点 B 动态特性对比

Table 1 Comparison of dynamic characteristic between operating points A and B

工作点	λ_R	λ_i
A	1.79	0
B	1.78	0

表 2 工作点 C 和工作点 D 稳态特性对比

Table 2 Comparison of steady-state characteristics between operating points C and D

工作点	k_{11}	k_{12}	k_{21}	k_{22}
C	7.74	5.66	-4.05	-2.79
D	7.74	5.66	-4.18	-2.78

氏距离分布。在飞行包线内选取 2478 个工作点, 提取每个工作点 2~9 维的特征参数, 并计算不同维度下特征参数之间的欧氏距离, 其分布如图 4 所示。由图可知, 随着维度的增加, 欧氏距离的分布趋于集中。这意味着高维空间内的任意两点间的欧氏距离差别小, 采用 K 均值(K-means)算法、FCM 算法等聚类算法在高维空间内难以找到具有代表性的中心点。

2.3.2 基于改进 DNE 算法的特征参数降维

针对多元特征参数中信息难以约省、维度高, 与传统聚类算法难以提取获得有效特征的矛盾, 在此提出基于改进 DNE 算法的多元特征参数降维方法, 在不损失特征信息的前提下降低特征参数维度, 此后采用 FCM 聚类算法进行特征参数提取。

考虑有 N 个式(14)所示的待聚类多元特征参数

$$(\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_i \ \cdots \ \theta_N) \quad (15)$$

其中 $\theta_i \in \mathbf{R}^s, 1 \leq i \leq N$ 。

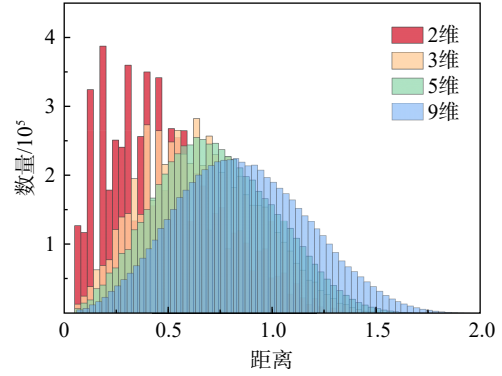


图 4 不同维度多元特征点间的距离分布

Fig. 4 Distribution of distances between multi-feature parameters with different dimensions

定义转换矩阵 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{s \times d}$, 有 $\mathbf{P}^T \theta_i \in \mathbf{R}^d, d < s$, 即 s 维多元特征参数 θ_i 被降至 d 维。

假设高维空间内每对特征参数点之间均存在相互作用的吸引力和排斥力。在这些力作用下, 高维空间内特征点都倾向于沿着合力的方向移动, $\mathbf{P}^T \theta_i$ 表示特征点 θ_i 的移动。

定义类内紧度 $\Delta(\mathbf{P})$ 和类间散度 $\delta(\mathbf{P})$ 为

$$\Delta(\mathbf{P}) = \sum_{i,j} \|\mathbf{P}^T \theta_i - \mathbf{P}^T \theta_j\|_F^2 \quad (\theta_i \text{ 与 } \theta_j \text{ 同类}) \quad (16)$$

$$\delta(\mathbf{P}) = \sum_{i,j} \|\mathbf{P}^T \theta_i - \mathbf{P}^T \theta_j\|_F^2 \quad (\theta_i \text{ 与 } \theta_j \text{ 异类}) \quad (17)$$

则最佳降维问题为

$$\min_{\mathbf{P}} \Phi(\mathbf{P}) = \Delta(\mathbf{P}) - \delta(\mathbf{P}) \quad (18)$$

式中 $\Phi(\mathbf{P})$ 为在合力作用下特征点的移动, 最小化 $\Phi(\mathbf{P})$ 意味着在 $\mathbf{P}$ 作用下, 同类特征点聚集, 而异类点之间尽可能分离。将发动机的动态性能先验知识和基于 K-Means++ 算法的预分类相结合, 可在二维动态特性空间中获得高可靠性的同、异类结果。首先对全包线工作点进行预分类, 然后基于该分类结果, 提出 DNE-FCM 算法进行细致的再聚类, 以提取典型特征点。预分类仅对动态特征相似的点进行初步分类, 典型特征点包含在这些类中, 通过再聚类的聚类中心点来确定典型特征点, 因而典型特征点受到预分类的影响较小。在 $\mathbf{P}$ 作用下, 经过降维的特征参数 θ 仍具有良好的完备性, 即未损失特征信息, 并且特征参数会被排布为同类点聚集、异类点分离的更易于聚类的形式, 提高聚类结果的可靠度。

为了进一步增强聚集和分离, 提高基于分类

的特征提取准确性, 本文提出如下的作用力

$$f_{ij}(\rho) = \begin{cases} e^{-\frac{\rho}{\tau}} & \boldsymbol{\theta}_i \text{与} \boldsymbol{\theta}_j \text{相邻且同类} \\ -e^{-\frac{\rho}{\tau}} & \boldsymbol{\theta}_i \text{与} \boldsymbol{\theta}_j \text{相邻但异类} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (19)$$

式中 τ 为设计参数, 正号和负号分别表示吸引力和排斥力。

$$\rho = \text{Dist}(\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\theta}_j) = \|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_j\|_2 \quad (20)$$

式中 $\text{Dist}(\cdot)$ 表示距离。由此, 式(18)所示优化可进一步表示为

$$\min_{\mathbf{P}} \Phi(\mathbf{P}) = \sum_{i,j} \|\mathbf{P}^T \boldsymbol{\theta}_i - \mathbf{P}^T \boldsymbol{\theta}_j\|_F^2 f_{ij}(\rho) \quad (21)$$

相较于式(18), 改进后的优化问题式(21)中, 通过 $f_{ij}(\rho)$ 引入两个特征点之间的距离信息, 使得它们的相互作用力随着距离的减小而快速增加, 反之亦然。新的作用力使得聚类中同类点更紧密, 异类点更分散。基于此获得最优降维, 基于降维特征的聚类结果仍然能够保证提取特征的有效性。

由式(21), 有

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{P}) &= \text{tr} \left[\sum_{i,j} \mathbf{P}^T (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_j) f_{ij}(\rho) (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_j)^T \mathbf{P} \right] = \\ &= \text{tr} \left[\mathbf{P}^T \sum_{i,j} (2\boldsymbol{\theta}_i f_{ij}(\rho) \boldsymbol{\theta}_i^T - 2\boldsymbol{\theta}_i f_{ij}(\rho) \boldsymbol{\theta}_j^T) \mathbf{P} \right] = \\ &= 2\text{tr} [\mathbf{P}^T \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S} - \mathbf{F}) \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{P}] \end{aligned} \quad (22)$$

式中 $\text{tr}(\cdot)$ 为矩阵的迹。

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi} = [\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_N] \\ \mathbf{F} = [f_{ij}] \\ \mathbf{S} = \text{Diag} \left(\sum_{j=1}^N f_{ij} \right) \end{cases} \quad (23)$$

式中 $\text{Diag}(\cdot)$ 表示对角阵。

不妨设转换矩阵 $\mathbf{P}$ 的列向量 $\mathbf{p}_i$, $i = 1, 2, \dots, d$ 都是标准正交向量, 即 $\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i = 1$, 则式(22)转化为

$$\begin{cases} \min & \sum_{i=1}^d \mathbf{p}_i^T \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S} - \mathbf{F}) \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{p}_i \\ \text{s.t.} & \mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i = 1 \end{cases} \quad (24)$$

令

$$L_{\text{DNE}}(\mathbf{p}_i, \lambda_i) = \sum_{i=1}^d [\mathbf{p}_i^T \boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S} - \mathbf{F}) \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{p}_i] - \lambda_i (\mathbf{p}_i^T \mathbf{p}_i - 1) \quad (25)$$

式中 λ_i ($1 \leq i \leq d$) 为拉格朗日乘子。

求 $\partial L_{\text{DNE}} / \partial \mathbf{p}_i = 0$, 可得

$$\boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S} - \mathbf{F}) \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{p}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i \quad (26)$$

由式(26)可知, λ_i 和 $\mathbf{p}_i$ 为矩阵 $\boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S} - \mathbf{F}) \boldsymbol{\Psi}^T$ 的特征值和特征向量。

由式(22)、式(24)和式(26)可得

$$\min \Phi(\mathbf{P}) = \min 2 \sum_{i=1}^d \lambda_i \quad (27)$$

设 $\boldsymbol{\Psi} (\mathbf{S} - \mathbf{F}) \boldsymbol{\Psi}^T$ 的特征值为 $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{\tilde{s}} \leq 0 \leq \lambda_{\tilde{s}+1} \leq \dots \leq \lambda_d$, 其中 $\tilde{s}$ 为负特征值的个数。令 $d = \tilde{s}$, 则 $\Phi(\mathbf{P})$ 取得最小值, 此时转换矩阵 $\mathbf{P}$ 的列向量由 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ 所对应的特征向量 $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_d$ 构成, 至此求解出最优转换矩阵 $\mathbf{P}^*$ 。经 $\mathbf{P}^{*T} \boldsymbol{\theta}_i$ 转换, s 维特征向量降至 d 维, 且实现同类特征点更聚集, 异类特征点更分离。

2.4 基于改进 DNE-FCM 算法的典型特征提取

记 $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{P}^{*T} \boldsymbol{\theta}$, 则低维特征空间中任意两点 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_j$ 间的距离为

$$\begin{aligned} \text{Dist}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_j) &= \|\mathbf{P}^{*T} \boldsymbol{\theta}_i - \mathbf{P}^{*T} \boldsymbol{\theta}_j\|_2 = \\ &= \sqrt{(\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_j)^T \mathbf{M} (\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_j)} =: \|\boldsymbol{\theta}_i - \boldsymbol{\theta}_j\|_M \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $\mathbf{M} = \mathbf{P}^* \mathbf{P}^{*T}$ 。

将式(28)所示的低维空间中距离测度引入 FCM 算法中, 形成改进 DNE-FCM 算法, 建立新的目标函数

$$J(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \boldsymbol{\Psi}) = \sum_{i=1}^{N_C} \sum_{j=1}^N u_{ij}^m \|\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_{Ci}\|_M^2 \quad (29)$$

式中 $\mathbf{U}$ 为隶属度矩阵, $\mathbf{V}$ 为聚类中心点的集合, N_C 为聚类个数, $m \in [1, \infty)$ 为模糊权重系数, u_{ij} 为第 j 个数据点对第 i 类的隶属度, $\boldsymbol{\theta}_{Ci}$ 表示第 i 类的聚类中心点, 矩阵 $\mathbf{U}$ 由 u_{ij} 组成, 且满足

$$\sum_{i=1}^{N_C} u_{ij} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (30)$$

由式(29)和式(30), 由拉格朗日乘子法可求得, 当

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N_C} \left(\frac{\|\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_{Ci}\|_M^2}{\|\boldsymbol{\theta}_j - \boldsymbol{\theta}_{Ck}\|_M^2} \right)^{\frac{1}{m-1}}} \quad (31)$$

$$\theta_{Ci} = \frac{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m \theta_j}{\sum_{j=1}^N u_{ij}^m} \quad (32)$$

时, 目标函数 J 取得最小值。

至此, 采用改进 DNE-FCM 算法提取获得由高维特征 θ_i 描述的典型特征点 θ_{Ci} , 其数量 N_C 为涡扇发动机模糊模型式(1)的规则数, 特征点处的线性模型即为模型式(1)中的后件变量。

2.5 基于典型特征的模型参数确定及优化

2.5.1 规则数 N_C

涡扇发动机模糊模型式(1)中, 规则数 N_C 影响模型的精度和复杂性, 是模型最重要的一个参数。规则数越多, 意味着将发动机性能非线性空间划分的模糊子空间和保留的典型非线性越多, 模型精度越高。另一方面, 更多规则将增加模型复杂性和计算耗时。在第 2.4 节中, 采用改进 DNE-FCM 算法提取典型特征时, 需给定聚类中心数, 也即规则数。因此本节采用手肘法确定最优规则数的范围, 采用轮廓系数法在此范围内依据类内聚度与分离度最大优化规则数。

定义误差平方和(sum of squared errors, SSE, 量符号记为 E_{ss})

$$E_{ss} = \sum_{i=1}^{N_C} \sum_{\theta_j \in C_i} \|\theta_j - \theta_{Ci}\|_2^2 \quad (33)$$

其中 C_i 表示第 i 个类。

随着聚类数 N_C 的增加, 特征点的划分越来越精细, 每个类的紧密程度提高, SSE 将迅速下降, 如图 5 所示。当 N_C 超过某一拐点时, 随 N_C 增加, SSE 的下降趋于平缓, 类差异变小。因此, 综合聚类效果与模糊模型复杂度, 在拐点附近选择 N_C 值较为合理, 即图 5 中阴影区域。

进一步定义轮廓系数

$$\kappa_{SC} = \frac{1}{N_C} \sum_{i=1}^{N_C} \frac{\beta_i(j) - \alpha_i(j)}{\max\{\alpha_i(j), \beta_i(j)\}} \quad (34)$$

式中

$$\alpha_i(j) = \frac{1}{N_{Ci} - 1} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{N_{Ci}} \text{Dist}(\theta_{ji}, \theta_{ki}) \quad (35)$$

$$\beta_i(j) = \frac{1}{N_{NB} - 1} \sum_{k=1}^{N_{NB}} \text{Dist}(\theta_{ji}, \theta_{NB,k}) \quad (36)$$

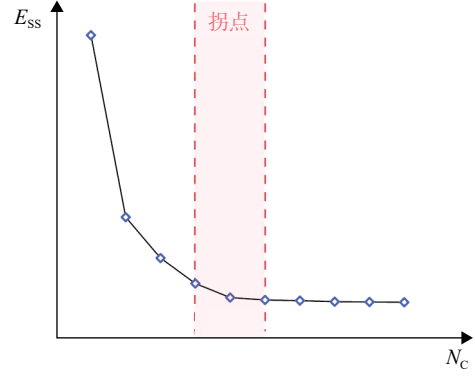


图 5 手肘法拐点示意

Fig. 5 Schematic of the inflection point of the elbow method

式中 $\alpha_i(j)$ 为第 i 类中特征点 θ_{ji} 到该类内其他特征点距离的平均值, 表征类 i 中特征点的紧密程度; $\beta_i(j)$ 为第 i 类中特征点 θ_{ji} 到临近类中所有特征点距离的平均值, 表征类 i 中特征点与其他类的分离度; N_{Ci} 为第 i 类中特征点个数, N_{NB} 为距离特征点 j 最近的类中特征点个数。

轮廓系数越接近 1, 表明类中特征点越相似, 内聚度越大, 同时与临近类中特征点的相似度越低, 分散度越大^[37]。由式(33)和式(34), 选择较小的 SSE 和最大的 κ_{SC} 对应的规则数, 可以获得既保证模型精度、数量又最少的规则数 N_C 。

2.5.2 前件变量

对涡扇发动机而言, 其多元特征参数分量 $\theta_1 = [H \quad Ma \quad n_H]^T$ 中 3 个参数是影响发动机进口的总温、总压和发动机的推力输出的主要参数, 因而选择它们作为模糊模型式(1)的前件变量 ψ , 使得模型能够有效反映出发动机所处的空气动力学环境、飞行状态以及工作负载, 保证 IT2 模糊模型的准确性和适用性。

2.5.3 IT2 隶属度函数参数 δ_{ji}

IT2 模糊模型的不确定性表征能力优势主要体现在式(5)所示的二维隶属度函数。在此优化式(5)中参数 δ_{ji} , 获得最优的二维隶属度不确定域。

记相同阶跃激励 u 下, N 个工作点处, 式(2)模糊模型状态 x 与式(7)部件级模型状态 x 之间的平均方均根误差(averaged root mean squared error, ARMSE)的量符号为 $\overline{E_{RMSu_i, x_j}}$ 。相较于相对误差, 方均根误差(root mean squared error, RMSE)能够综合体现模糊模型整个动态和稳态过程相对于部件级模型的偏差。

令性能指标

$$J_{RMSE} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \overline{E_{RMSu_i, x_j}} \quad (37)$$

针对式(5)建立优化问题

$$\min_{\delta_{ji}} J_{\text{RMSE}} \quad (38)$$

式中 J_{RMSE} 越小, 模糊模型精度越高。采用 SQP 算法求解式(38), 获得最优 δ_{ji}^* 。求解过程不再赘述。

综上, 采用手肘法和轮廓系数法优化确定规则数和初始特征参数的分类, 进一步基于改进 DNE-FCM 算法经特征提取获得典型特征和后件变量后, 选择合适的前件变量并优化得到隶属度函数, 即建立涡扇发动机 IT2 模糊模型, 建模过程如下所示:

步骤 1 求式(14)所示的全包线各稳态工作点多元特征参数 θ ;

步骤 2 由式(33)和式(34), 使用手肘法及轮廓系数法确定聚类个数 N_c ;

步骤 3 依据 N_c , 采用 K-means++ 算法进行预分类;

步骤 4 给定式(19)和式(29)中 τ 和 m , 并基于步骤 3 中的预分类结果, 采用改进 DNE-FCM 算法对步骤 1 中求得的多元特征参数进行二次聚类, 获得 θ_{Ci} ;

步骤 5 采用偏导数法, 在 θ_{Ci} 对应的工作点处建立式(8)所示状态变量模型, 作为式(1)中后件变量;

步骤 6 确定模糊规则前件变量 ψ ;

步骤 7 采用 SQP 算法求解式(38), 得到式(5)中上下隶属度函数设计参数 δ_{ji} ;

步骤 8 由 N_c 、 ψ , 式(5)和 θ_{Ci} 对应的工作点处状态变量模型式(8), 建立得到式(1)所示涡扇发动机 IT2 模糊模型。

3 涡扇发动机 IT2 模糊模型建模

本文以某小涵道比涡扇发动机为模糊模型建模对象, 建模数据源自该发动机高精度部件级模型。该部件级模型是依据发动机工作原理和各类试验/运行数据建得, 逼近发动机实际工作的运行情况, 精度高, 具有较高的置信度, 能够保证本文所建模糊模型数据的有效性。

3.1 多元特征参数提取

令式(1)中

$$\begin{cases} \mathbf{x} = [n_H & R_{EP}]^T \\ \mathbf{u} = [W_{fb} & A_8]^T \\ \mathbf{y} = [n_H & R_{EP} & n_L & T_{43} & p_6 & T_3]^T \end{cases} \quad (39)$$

式中 n_H 为高压转子转速, R_{EP} 为发动机落压比 (EPR), W_{fb} 为主燃油流量, A_8 为尾喷口喉道面积, n_L 为低压转子转速, T_{43} 为涡轮间总温, p_6 为低压涡轮出口总压, T_3 为压气机出口总温。

在涡扇发动机全飞行包线内、发动机慢车以上状态, 高度 H 每隔 1 km、马赫数 Ma 每隔 0.1、高压转子转速 n_H 每隔 2% 选取一个工作点, 共计 2478 个工作点 (见图 6), 即 $N = 2478$ 。在每个工作点, 依据该涡扇发动机部件级模型, 采用偏导数法建立式(8)所示状态变量模型。

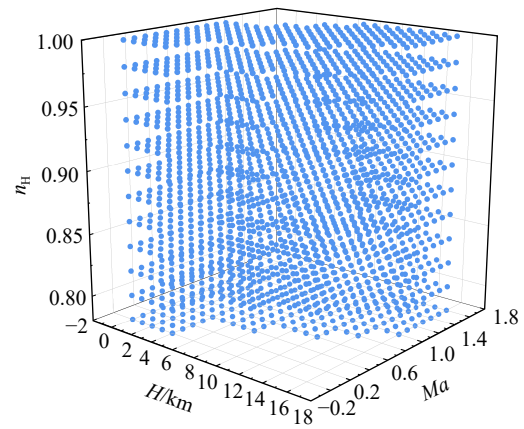


图 6 飞行包线内稳态工作点

Fig. 6 Steady state operating point in the flight envelope

由式(6)、式(10)、式(13)和 $\mathbf{x}$ 的维度可得特征参数向量为

$$\boldsymbol{\theta} = [H \quad Ma \quad n_H \quad \lambda_R \quad \lambda_l \quad k_{11} \quad k_{12} \quad k_{21} \quad k_{22}]^T \quad (40)$$

3.2 基于改进 DNE-FCM 的 IT2 模糊模型建模

第 1 步 取 $N_c = 1, 2, \dots, 10$, 采用 K-Means++ 算法进行预分类。由式(33)求得不同类数量 N_c 的 SSE, 如图 7(a) 所示。由图可知, $N_c = 4$ 时, SSE 变化减缓, 当 $N_c \geq 7$ 时, SSE 基本保持不变, 因此选取最优规则数的范围为 $N_c \in \{4, 5, 6, 7\}$ 。

第 2 步 在上述不同 N_c 取值下, 由式(34)计算轮廓系数 κ_{SC} , 结果如图 7(b) 所示。由图可知, 当类数量为 6 时, κ_{SC} 最接近 1, 因而接下来基于 DNE-FCM 的特征提取中, 取 $N_c = 6$ 。

第 3 步 依据涡扇发动机部件级模型, 求取图 6 中所示的 2478 个工作点处的主导极点和稳态增益。取 $\tau = 0.2$, 由式(19)、式(23)、式(40)建立 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2478}$, 以及

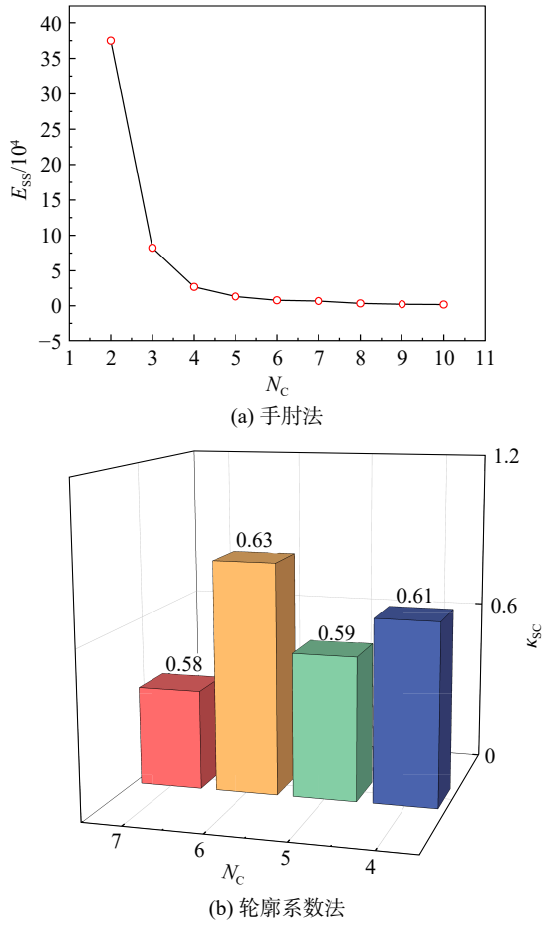


图 7 聚类个数选择

Fig. 7 Clustering number selection

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 16 \\ 0 & 0.1 & \cdots & 1.6 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1.5 & -1.52 & \cdots & -0.02 \end{bmatrix}_{9 \times 2478} \\ F = \begin{bmatrix} 0 & 0.73 & \cdots & 0 \\ 0.73 & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{2478 \times 2478} \\ S = \begin{bmatrix} 0.84 & & & \\ & 2.15 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2.37 \end{bmatrix}_{2478 \times 2478} \end{array} \right. \quad (41)$$

据此求得 $\Psi(S-F)\Psi^T$ 特征值和降维矩阵为

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = [-5.84 \quad -0.78 \quad 0.12 \quad \cdots \quad 16.19] \\ P = \begin{bmatrix} -0.0656 & -2.144 \\ 0.1694 & 0.1172 \\ \vdots & \vdots \\ 0.3268 & 0.2389 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (42)$$

第 4 步 取 $m=2$, 由式(29)~式(32)建立基

于最优降维信息的性能指标, 采用 FCM 算法, 获得 6 个类, 类中心与类分布如图 8 所示(图中省略了部分包线点以清晰表现类中心与类分布), 类中心(即典型特征点)及其对应的状态变量模型信息如表 3 和表 4 所示。

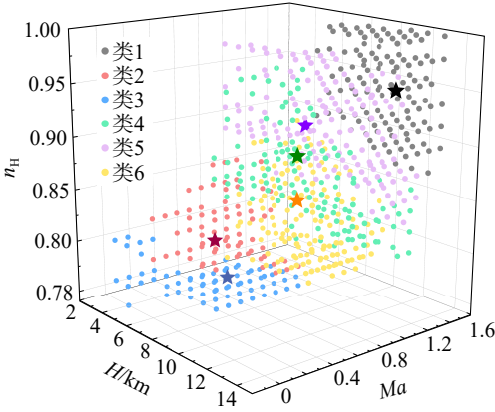


图 8 改进的 DNE-FCM 算法聚类结果

Fig. 8 Clustering results of improved DNE-FCM algorithm

表 3 改进的 DNE-FCM 算法聚类结果

Table 3 Clustering results of improved DNE-FCM algorithm

典型特征点	H/km	Ma	$n_H/\%$
1	7.90	0.86	88
2	5.77	0.74	79
3	4.58	0.71	82
4	8.56	0.96	91
5	7.02	0.88	84
6	11.89	1.19	95

第 5 步 选取前件变量

$$\begin{cases} \psi_1 = H \\ \psi_2 = Ma \\ \psi_3 = n_H \end{cases} \quad (43)$$

第 6 步 由式(37)和式(38), 模型精度指标

J_{RMSE} 可表示为

$$J_{\text{RMSE}} = \frac{\overline{E_{\text{RMS}W_{\text{fb},n_H}}} + \overline{E_{\text{RMS}W_{\text{fb},\text{EPR}}}}}{\overline{E_{\text{RMS}A_{\text{g},n_H}}} + \overline{E_{\text{RMS}A_{\text{g},\text{EPR}}}}} \quad (44)$$

由式(44)和 SQP 算法, 迭代寻优, 获得式(5)中最优隶属度参数为

$$\begin{cases} \delta_1^* = [0.63 \quad 0.50 \quad 0.71 \quad 0.93 \quad 0.45 \quad 0.88] \\ \delta_2^* = [5.66 \quad 2.80 \quad 2.24 \quad 8.58 \quad 6.33 \quad 2.18] \\ \delta_3^* = [111.3 \quad 75.1 \quad 114.5 \quad 87.5 \quad 75.8 \quad 115.5] \end{cases} \quad (45)$$

表 4 模糊模型后件变量

Table 4 Fuzzy model consequence variables

典型特征点	后件变量	
1	$A_1 = \begin{bmatrix} 5.33 & -2.91 \\ 123.50 & -51.47 \end{bmatrix}$ $B_1 = \begin{bmatrix} 0.50 & -1.12 \\ 4.79 & -20.71 \end{bmatrix}$ $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2.170\ 7 & -1.414\ 3 & 1.393\ 1 & 1.075\ 3 \\ 0 & 1 & -0.370\ 7 & 0.093\ 0 & 0.035\ 6 & -0.024\ 5 \end{bmatrix}^T$ $D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.014\ 2 & 0.397\ 3 & 0.037\ 0 & 0.053\ 6 \\ 0 & 0 & -0.033\ 1 & 0.079\ 5 & -0.219\ 6 & -0.048\ 2 \end{bmatrix}^T$	
$\vdots$	$\vdots$	
6	$A_6 = \begin{bmatrix} 5.30 & -2.08 \\ 159.49 & -47.87 \end{bmatrix}$ $B_6 = \begin{bmatrix} 0.42 & -1.10 \\ 4.32 & -26.86 \end{bmatrix}$ $C_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3.910\ 3 & -1.306\ 7 & 1.460\ 0 & 0.870\ 2 \\ 0 & 1 & -0.270\ 7 & -0.019\ 3 & 0.124\ 1 & 0.042\ 2 \end{bmatrix}^T$ $D_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.062\ 3 & 0.456\ 0 & 0.026\ 6 & 0.063\ 3 \\ 0 & 0 & -0.020\ 1 & 0.099\ 8 & -0.235\ 4 & -0.048\ 4 \end{bmatrix}^T$	

上下隶属度函数及不确定域如图 9 所示。

综上,由 $N_c = 6$ 、式(5)、式(43)、式(45)、表 4,建立式(1)所示的某涡扇发动机 IT2 型模糊模型。

3.3 IT2 模糊模型精度验证

3.3.1 IT2 模糊模型典型工作点精度验证

对建立的涡扇发动机全包线 IT2 模糊模型开展飞行包线内典型工作点模型精度验证。依据式(39)定义

$$e_i = y_i - y_{CLM,i} \quad (46)$$

式中 y_i 和 $y_{CLM,i}$ 分别为式(39)中各分量的 IT2 模糊

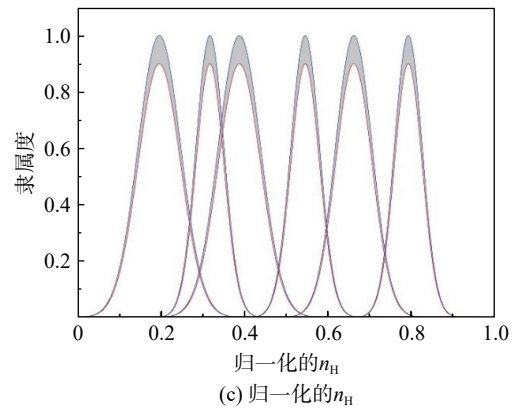


图 9 隶属度函数与不确定域

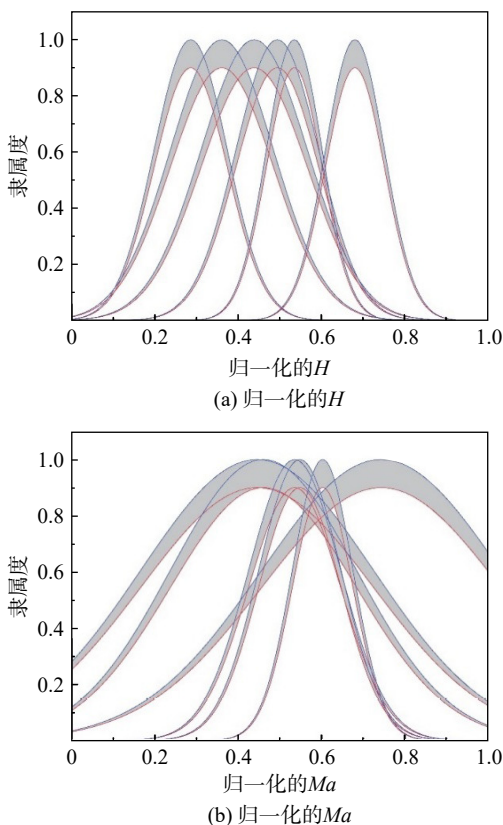
Fig. 9 Membership function and FOU

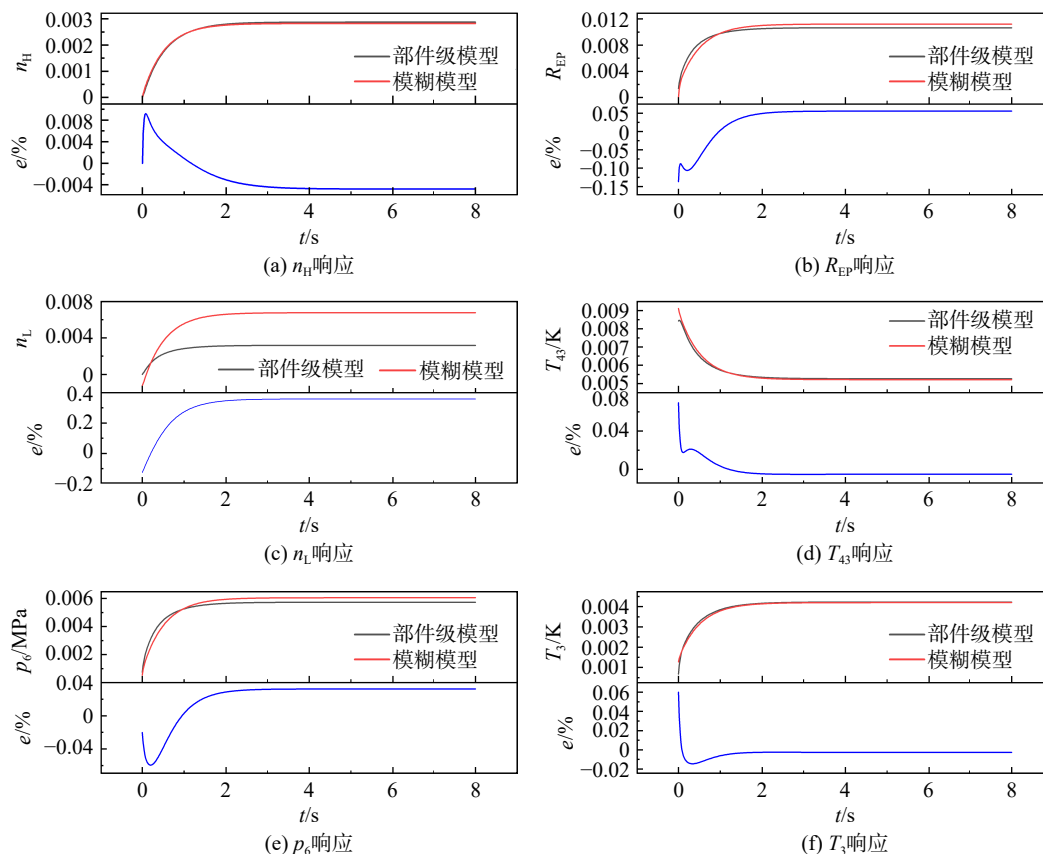
模型输出和部件级模型(component level model, CLM)输出。

从图 10 及图 11 可见,在该典型工作点上,建立的涡扇发动机 IT2 模糊模型的响应与部件级模型响应的偏差均在 0.5% 以内,模糊模型在典型工作点处具有良好的模型精度。

为验证双输入变化下的 IT2 模糊模型精度,选取稳态工作点 $H = 8\text{ km}$, $Ma = 0.8$, $n_H = 84\%$,对模糊模型和部件级模型 W_{b6} 和 A_8 作 2% 阶跃输入,模糊模型和部件级模型的动态响应如图 12 所示。由图 12 可见,在双输入作用下,IT2 模糊模型与部件级模型响应的偏差较单输入作用下增大,但 6 个输出变量的最大误差仍在 0.8% 以内,满足模型精度要求。

图 10、图 11 及图 12 还表明,本文建立的 IT2 模糊模型模糊推理过程中,主要基于隶属度函数和模糊规则,对后件变量中状态变量模型的系统矩阵、输入矩阵等进行矩阵代数计算,不涉及复



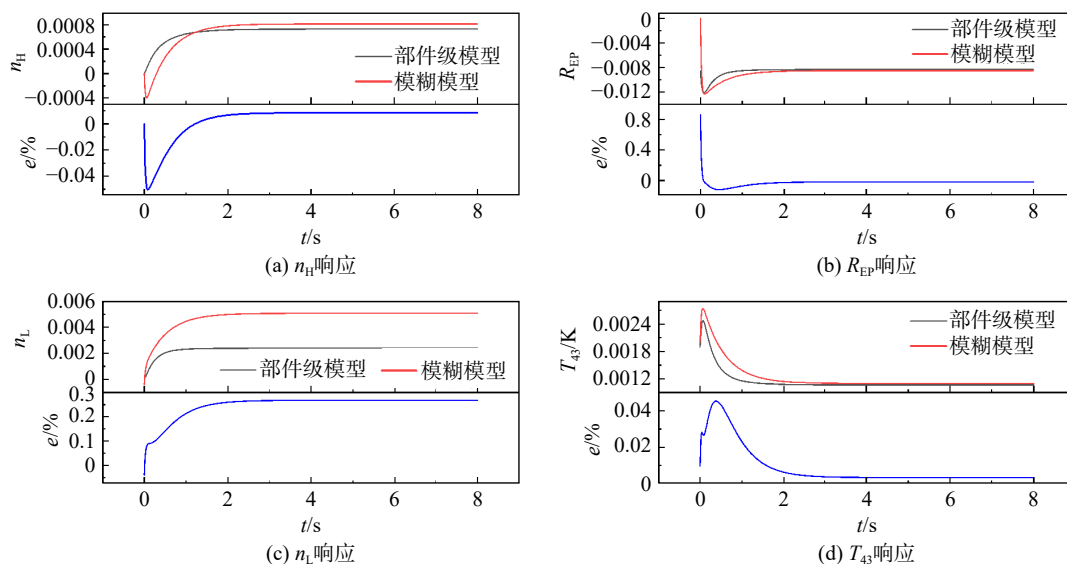
图 10 $H=11$ km, $Ma=1.2$, $n_H=94\%$, W_{fb} 做 2% 阶跃响应Fig. 10 Responses on $H=11$ km, $Ma=1.2$, $n_H=94\%$ with 2% W_{fb} step

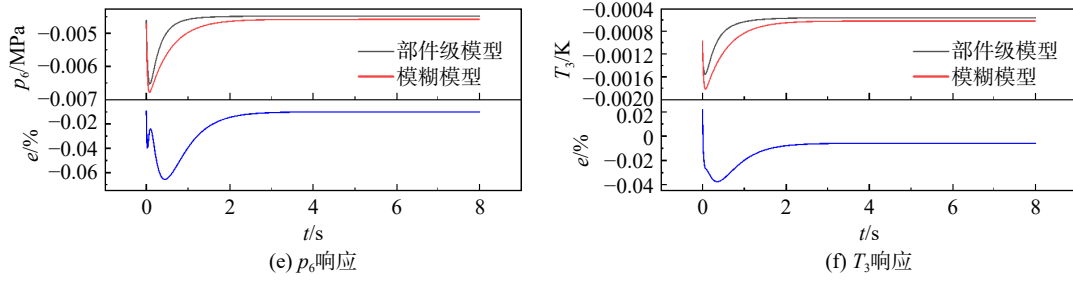
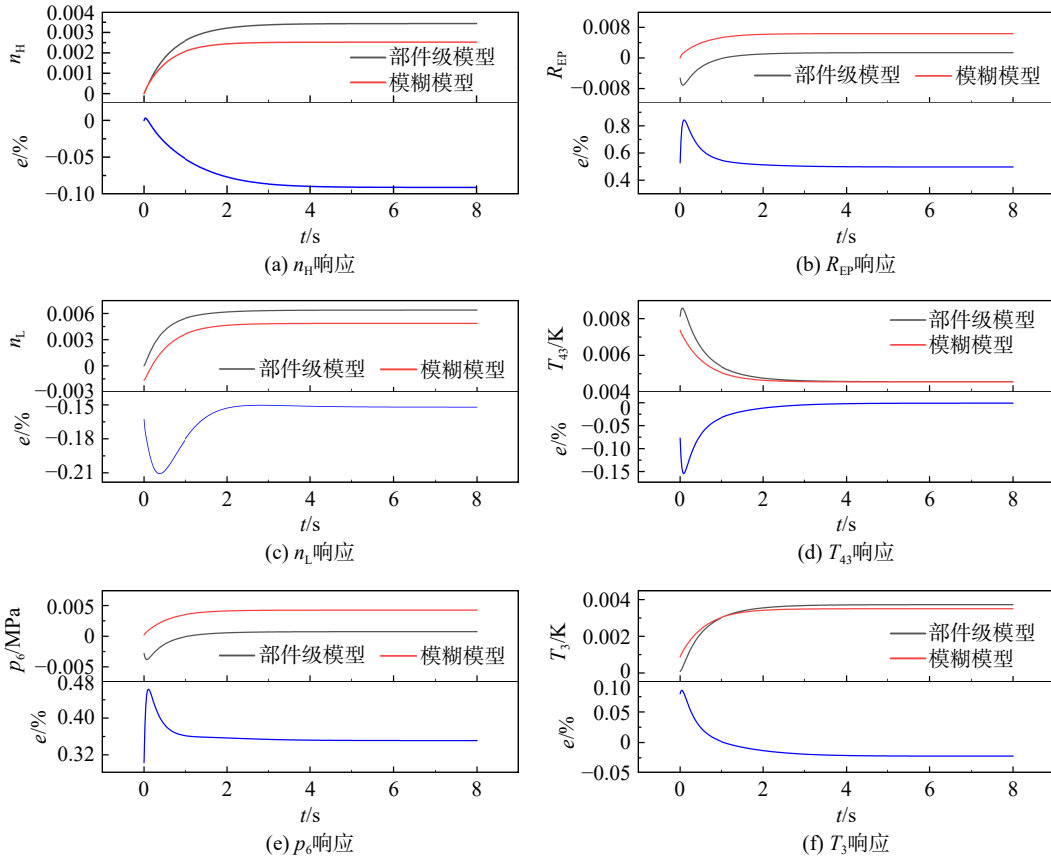
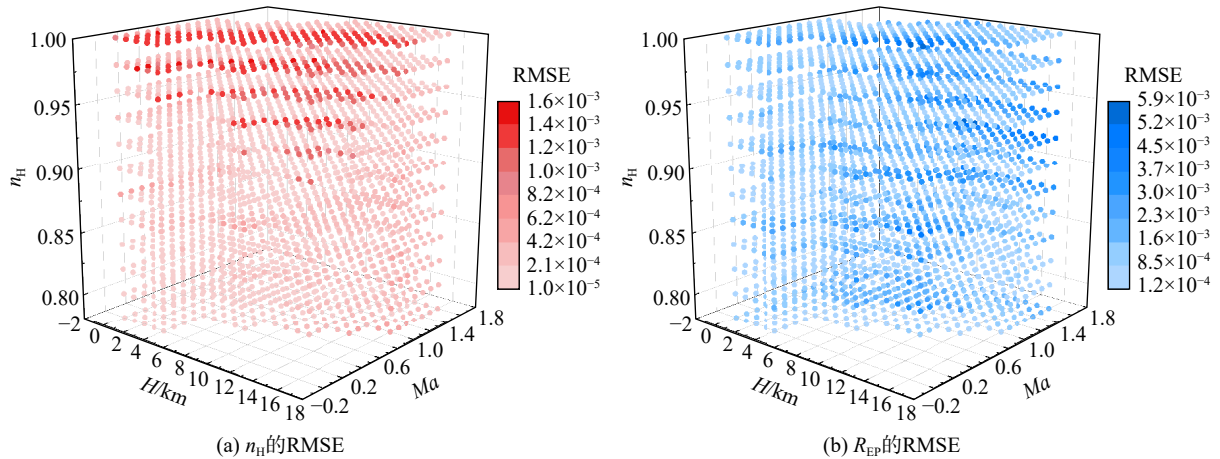
杂的数值计算, 因此模型计算具有良好的稳定性和鲁棒性。

3.3.2 IT2 模糊模型全包线精度验证

为了验证模糊模型的全包线精度, 将涡扇发动机在包线内不同工况下 2 478 个点, 进行与典型点相同的仿真, 依据式(44)计算全包线中两个模型输出之间的 RMSE, 如图 13 所示, 其中最大

方均根误差 E_{RMSmax} 和平均方均根误差 $\overline{E_{RMS}}$ 在表 5 中给出。由表 5 可知, 包线内不同工况下, 6 个输出量的 $E_{RMSmax} \leq 1.8\%$, $\overline{E_{RMS}} \leq 0.20\%$, 表明所建立的涡扇发动机 IT2 模糊模型在整个包线、不同工况下均具有较高的精度, 能够合理刻画涡扇发动机的非线性特性。图 13 反映出在高转速、包线边缘处的各输出变量 RMSE 较包线内大, 这说明



图 11 $H=11$ km, $Ma=1.2$, $n_H=94\%$, A_8 做 2% 阶跃响应Fig. 11 Responses on $H=11$ km, $Ma=1.2$, $n_H=94\%$ with 2% A_8 step图 12 $H=8$ km, $Ma=0.8$, $n_H=84\%$, W_b 和 A_8 做 2% 阶跃响应Fig. 12 Responses on $H=8$ km, $Ma=0.8$, $n_H=84\%$ with 2% W_b and A_8 step

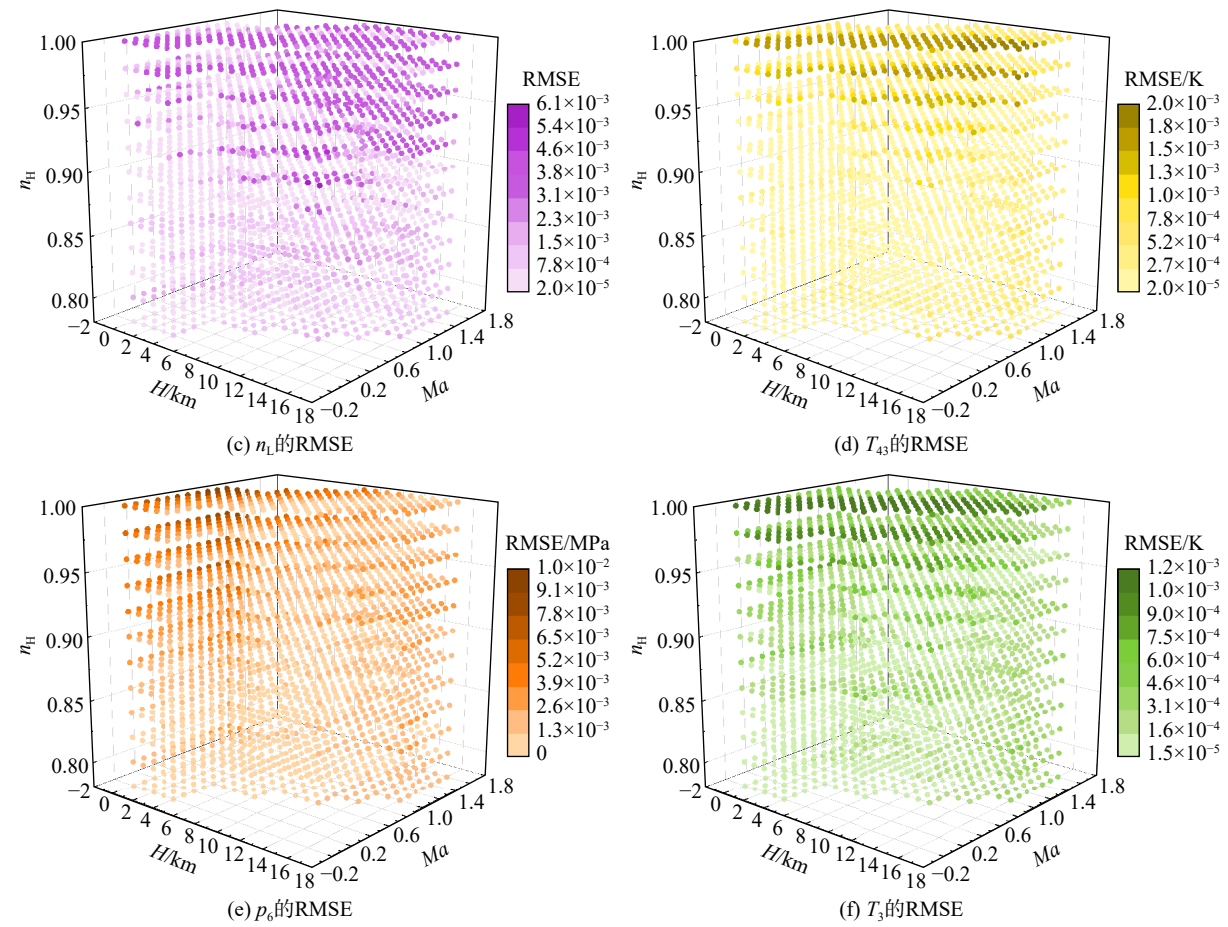


图 13 W_{fb} 做 2% 阶跃响应各输出全包线的 RMSE
Fig. 13 Full envelope RMSE of responses with 2% W_{fb} step

表 5 各输出变量 E_{RMSmax} 和 $\overline{E_{RMS}}$ Table 5 E_{RMSmax} and $\overline{E_{RMS}}$ of output variables				
输出变量	W_{fb} 2% 阶跃		A_8 2% 阶跃	
	$E_{RMSmax}/\%$	$\overline{E_{RMS}}/\%$	$E_{RMSmax}/\%$	$\overline{E_{RMS}}/\%$
n_H	0.16	0.03	0.41	0.03
R_{EP}	0.59	0.14	1.6	0.17
n_L	0.61	0.15	1.8	0.20
T_{43}/K	0.20	0.04	0.54	0.07
p_6/MPa	1.04	0.18	0.83	0.17
T_3/K	0.12	0.03	0.23	0.03

模糊模型精度在包线内更高。分析认为,这主要是由于发动机各变量间存在复杂非线性耦合,且动、稳态特性在高转速、包线边缘附近变化较为剧烈,非线性更强,而高转速、包线边缘处模糊规则数和后件变量信息相较包线内更少,模糊模型的非线性拟合精度下降。同时由图 13(c)可知,图 10 及图 11 中 n_L 的误差与其余输出变量相比较大是由于该典型工作点恰好处于全包线内 n_L 的误差高点,但该点处输出变量 n_L 仍处于建模误差的

允许范围内。
在此值得注意的是,对于非线性特性更加复杂的发动机对象,采用本文建模方法时可以考虑采用更多的模糊规则及后件变量来提高模型刻画复杂非线性的精度,同时应在精度和计算代价之间进行权衡,保证模型运行的实时性。
进一步对比涡扇发动机 IT2 模糊模型和 T1 模糊模型精度。本文采用与 IT2 模糊模型类似的建模流程与方法建立同一涡扇发动机的 T1 模糊模型。对 IT2 模糊模型、T1 模糊模型和部件级模型,在 2 478 个工作点开展与第 3.3.1 节中相同的仿真,获得 IT2 模糊模型、T1 模糊模型和部件级模型的 6 个输出,分别计算 IT2 模糊模型和 T1 模糊模型相比于部件级模型的 RMSE,限于篇幅,在此仅给出两个模糊模型在 354 个工作点处,即当 $n_H = 90\%$ 和 $n_H = 80\%$ 时,输出变量 n_H 和 n_L 的 RMSE,结果如图 14 所示。同时,两个模糊模型在全包线内的 $\overline{E_{RMS}}$ 列于表 6。
从图 14 可见,在所给的 354 个工作点中,IT2

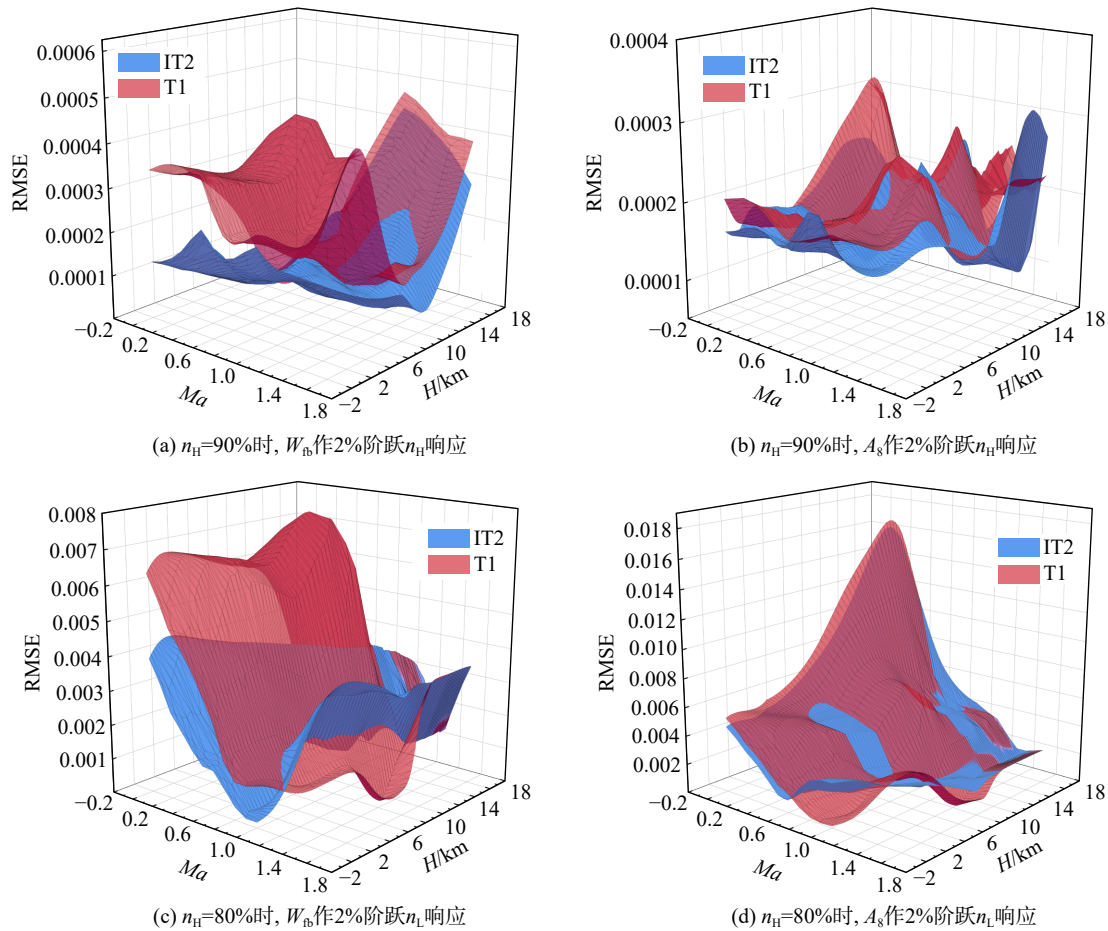


图 14 A_8 和 W_{fb} 做 2% 阶跃响应模糊模型输出 RMSE 对比

Fig. 14 Fuzzy model output RMSE comparison with 2% A_8 and W_{fb} step

表 6 IT2 与 T1 模糊模型各输出变量 $\overline{E_{RMS}}$

Table 6 $\overline{E_{RMS}}$ of the IT2 and T1 fuzzy model output variables

输出变量	W_{fb} 2% 阶跃 $\overline{E_{RMS}}/\%$		A_8 2% 阶跃 $\overline{E_{RMS}}/\%$	
	IT2	T1	IT2	T1
n_H	0.03	0.04	0.05	0.06
R_{EP}	0.14	0.31	0.17	0.29
n_L	0.15	0.22	0.20	0.23
T_{43}/K	0.04	0.07	0.07	0.11
p_6/MPa	0.18	0.27	0.17	0.22
T_3/K	0.03	0.06	0.03	0.05

模糊模型输出变量的 RMSE 在飞行包线内绝大部分区域小于 T1 模糊模型,在个别区域反之,且此时两模型的 RMSE 差别较小。分析认为,产生这种情况的原因是优化模型的隶属度函数参数时,采用的优化目标是全包线内的 $\overline{E_{RMS}}$ 最小,这使得 T1 模糊模型的输出 RMSE 在包线内小部分区域小于 IT2 模糊模型,但总体上 IT2 模糊模型的精度是优于 T1 模型的。如表 6 所示,在全包线范围内 IT2 模糊模型各输出变量的 $\overline{E_{RMS}}$ 均比 T1 模糊

模型小 20% 以上。由此可知,所建立的涡扇发动机 IT2 模糊模型在模型非线性拟合能力上强于传统的 T1 模糊模型。

3.3.3 IT2 模糊模型不确定性处理能力验证

为验证本文建立的涡扇发动机 IT2 模糊模型具有更好的不确定性处理能力,在此考虑发动机的性能退化及个体差异造成的建模不确定性。

性能退化与个体差异都会导致单个或多个气路部件的性能参数发生变化,如旋转部件的流量和效率。需要指出的是前者导致性能参数随时间缓慢变化,而后者引起的变化则相对固定。由于性能退化和个体差异对性能参数的影响规律较为复杂,因此本文研究中将两者注入简化为发动机工作中的某个时刻性能参数变化,并据此构建三种不确定性模式。

定义健康参数

$$\begin{cases} C_{SEi} = \frac{\eta_i(t)}{\eta_i^*} \\ C_{SWi} = \frac{w_i(t)}{w_i^*} \end{cases} \tag{47}$$

式中 $i = 1, 2, 3, 4$, C_{SE} 为效率系数, C_{SW} 为流量系数, $\eta_i(t)$ 、 η_i^* 、 $w_i(t)$ 和 w_i^* 分别为第 i 个旋转部件的实际效率和标称效率、实际流量和标称流量, 下标 1~4 分别代表部件风扇 (Fan)、高压压气机 (HPC)、高压涡轮 (HPT) 和低压涡轮 (LPT)。各部件的性能参数变化如表 7 所示。

表 7 旋转部件性能变化程度

Table 7 Degree of performance variation of rotating parts

部件	健康参数			
	效率系数	变化程度/%	流量系数	变化程度/%
Fan	C_{SE1}	-3	C_{SW1}	-4
HPC	C_{SE2}	-6	C_{SW2}	-8
HPT	C_{SE3}	-3	C_{SW3}	2
LPT	C_{SE4}	-2	C_{SW4}	1

选取工作点 1 ($H = 11\text{ km}$, $Ma = 1.2$, $n_H = 94\%$) 和工作点 2 ($H = 3\text{ km}$, $Ma = 0.3$, $n_H = 80\%$), 在如表 8 所示的 3 种不确定性模式下分别计算式 (44) 所示的模型精度指标 J_{RMSE} , 结果如图 15 所示。

表 8 不同不确定性模式中的部件性能变化

Table 8 Variation in component performance under different uncertainty modes

不确定性模式	性能变化部件
1	标称状态(无部件性能变化)
2	HPC 和 HPT 性能变化
3	全部部件性能变化

从图 15 可见, 在不同的不确定性模式下, IT2 模糊模型精度指标 J_{RMSE} 的数值变化在 0.05% 以内, 而 T1 模糊模型的 J_{RMSE} 则增长 2 倍左右。在部件级模型产生不确定性时, 由于 T1 模糊模型的隶属度函数仅有一维, 限制了其不确定性描述能力, 导致模糊模型精度会受很大影响, 模型稳定性、可靠性无法保证。而 IT2 模糊模型由于其对隶属度函数进行模糊化, 具有上下隶属度函数结构, 将一维的隶属度函数拓展为二维的不确定域, 其不确定性描述能力大大增强, 可以把无数个具有确定隶属度函数的 T1 模糊模型的集合看作是 IT2 模糊模型, 因此 IT2 模糊模型处理不确定性的能力比 T1 模糊模型更强。在发生性能退化或发动机有较大个体差异, 出现较大的模型不确定性时, 所建立的涡扇发动机全包线区间二型模糊模型有更强的不确定性处理能力, 具有更好的模型鲁棒性和可靠性。

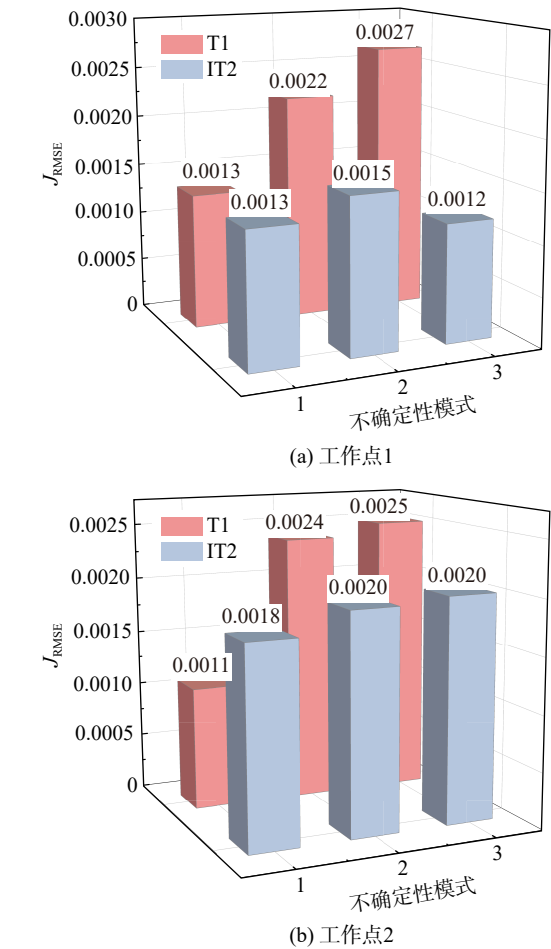


图 15 不同不确定性模式下模糊模型的 J_{RMSE}
Fig. 15 Fuzzy model J_{RMSE} of different uncertainty modes

同时, 在 2478 个工作点计算并对比 T1 与 IT2 模糊模型的模型辨识计算耗时和平均耗时, 结果如表 9 所示。仿真中, 模型计算硬件环境为 64 位 Windows 操作系统, 核心处理器为 12th Gen Intel® Core i5- 12600 K, 主频为 3.69 GHz, 并配备 16 G 内存。由表 9 可知, 对于模型单次输入输出计算, T1 模型的最大计算耗时为 5.5 ms, 平均耗时为 3.9 ms。IT2 模型的最大耗时为 5.5 ms, 平均耗时为 3.9 ms。这表明 IT2 模糊模型在不牺牲实时性的前提下, 提高了模型精度与不确定性处理能力。文献 [38] 建立了变循环发动机 LPV 机载模型, 其单步计算平均耗时为 3.43 ms, 本文建立

表 9 模糊模型计算时间

Table 9 Fuzzy model calculation time

模糊模型	模型计算耗时/ms				
	工作点 1	工作点 2	...	工作点 2478	平均耗时
T1	5.5	4.1	...	3.8	3.9
IT2	5.5	4.0	...	3.9	3.9

的IT2模糊模型计算平均耗时于其接近。文献[39]使用自适应变步长因子拟牛顿法建立部件级机载模型,其单周期运行耗时最大为11 ms。对比部件级机载模型,本文建立的IT2模糊模型在实时性上具有较大优势。

综上,本研究通过典型工作点和全包线模型精度验证及不确定性处理能力验证表明:降维后的多元特征参数结合IT2模糊规则的上下隶属度设计,完整覆盖了发动机全工况动、稳态特性,证明特征参数集具备完备性,可充分表征大范围工况变化下的非线性与不确定性。本文建立的涡扇发动机IT2模糊模型兼具高精度、高不确定性处理能力与高实时性,可作为机载模型或控制器设计模型使用。

4 结 论

1) 本文提出了一种基于多元特征智能提取的涡扇发动机全包线区间二型模糊模型建模方法。

2) 设计并提取了包含飞涡扇发动机工作环境、状态、动、稳态特性信息的涡扇发动机多元特征参数。使用改进的DNE-FCM算法求取了涡扇发动机典型特征点。在典型特征点辨识模糊规则后件变量,以高度、马赫数、高压转子转速为前件变量,使用SQP算法求解隶属度函数参数优化模型,建立了涡扇发动机全包线区间二型模糊模型。

3) 在飞行包线典型工作点上和全包线内验证了所建IT2模糊模型的精度与不确定性处理能力。结果表明IT2模糊模型与部件级模型相比各输出平均方均根误差均小于0.20%,满足建模精度要求,IT2模糊模型在模型不确定性较大的情况下与T1模糊模型相比具有更强的不确定性处理能力,且IT2模糊模型单一工作点平均计算时间为3.9 ms,具备良好的实时性。本文提出的建模方法能够为涡扇发动机机载模型建模及控制器设计模型建模提供良好的参考。

参考文献:

- [1] Mattingly J D. Aircraft engine design[M]. Reston, US: AIAA, 2002.
- [2] 胡明辉, 高金吉, 江志农, 等. 航空发动机振动监测与故障诊断技术研究进展[J]. 航空学报, 2024, 45(4): 630194.
Hu Minghui, Gao Jinji, Jiang Zhinong, et al. Research progress on vibration monitoring and fault diagnosis for aero-engine[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2024, 45(4): 630194. (in Chinese)
- [3] 赵万里, 郭迎清, 徐柯杰, 等. 航空发动机多电分布式控制系统故障诊断与容错关键技术综述[J]. 航空学报, 2023, 44(10):

027519.

- Zhao Wanli, Guo Yingqing, Xu Kejie, et al. Review of key technologies for fault diagnosis and accommodation for multi-electric distributed engine control system[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2023, 44(10): 027519. (in Chinese)
- [4] Sugiyama N. Derivation of system matrices from nonlinear dynamic simulation of jet engines[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 1994, 17(6): 1320-1326.
- [5] Chen Hongyi, Li QiuHong, Pang Shuwei, et al. A state space modeling method for aero-engine based on AFOS-ELM[J]. Energies, 2022, 15(11): 3903.
- [6] Kajiwar H, Apkarian P, Gahinet P. LPV techniques for control of an inverted pendulum[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1999, 19(1): 44-54.
- [7] Reberga L, Henrion D, Bernussou J, et al. LPV modeling of a turbofan engine[J]. IFAC Proceedings Volumes, 2005, 38(1): 526-531.
- [8] 张增辉, 杨凌宇, 申功璋. 高超声速飞行器大包线切换LPV控制方法[J]. 航空学报, 2012, 33(9): 1706-1716.
Zhang Zenghui, Yang Lingyu, Shen Gongzhang. Switching LPV control method in wide flight envelope for hypersonic vehicles[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2012, 33(9): 1706-1716. (in Chinese)
- [9] 肖地波, 陆宇平, 刘燕斌, 等. 应用保护映射理论的高超声速飞行器自适应控制律设计[J]. 航空学报, 2015, 36(10): 3327-3337.
Xiao Dibo, Lu Yuping, Liu Yanbin, et al. Adaptive control law design using guardian maps theory for hypersonic vehicles[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2015, 36(10): 3327-3337. (in Chinese)
- [10] Wang Yangjing, Huang Jinquan, Zhou Wenxiang, et al. Neural network-based model predictive control with fuzzy-SQP optimization for direct thrust control of turbofan engine[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2022, 35(12): 59-71.
- [11] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
- [12] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[M]//Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems. San Francisco, US: Morgan Kaufmann Publishers, 1993: 387-403.
- [13] Fantuzzi C, Rovatti R. On the approximation capabilities of the homogeneous Takagi-Sugeno model[C]//Proceedings of IEEE 5th International Fuzzy Systems. Piscataway, US: IEEE, 2002: 1067-1072.
- [14] Zeng Ke, Zhang Naiyao, Xu Wenli. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 773-780.
- [15] Johansen T A, Shorten R, Murray-smith R. On the interpretation and identification of dynamic Takagi-Sugeno fuzzy models[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2000, 8(3): 297-313.
- [16] Mendel J M. Explaining the performance potential of rule-based fuzzy systems as a greater sculpting of the state space[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2018, 26(4): 2362-2373.
- [17] 梁帅, 杨林, 杨朝旭, 等. 基于Kalman滤波的变体飞行器T-S模糊控制[J]. 航空学报, 2020, 41(增刊2): 724274.
Liang Shuai, Yang Lin, Yang (Chao) Zhao(Xu), et al. Kalman filter based T-S fuzzy control for morphing aircraft[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2020, 41(Suppl. 2): 724274. (in Chinese)

- [18] Zhang Zhina, Niu Yugang, Karimi H R. Sliding mode control of interval type-2 fuzzy systems under round-robin scheduling protocol[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, 51(12): 7602-7612.
- [19] Sun Jiayue, Zhang Huaguang, Wang Yingchun, et al. Fault-tolerant control for stochastic switched IT2 fuzzy uncertain time-delayed nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(2): 1335-1346.
- [20] Teng Long, Wang Youyi, Cai Wenjian, et al. Robust fuzzy model predictive control of discrete-time Takagi-Sugeno systems with nonlinear local models[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2018, 26(5): 2915-2925.
- [21] 郑新前, 王钧莹, 黄维娜, 等. 航空发动机不确定性设计体系探讨[J]. *航空学报*, 2023, 44(7): 027099.
- Zheng Xinqian, Wang Junying, Huang Weina, et al. Uncertainty-based design system for aeroengines[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2023, 44(7): 027099. (in Chinese)
- [22] Mendel J M, Hagar H, Tan W W, et al. Introduction to type-2 fuzzy logic control: theory and applications[M]. Hoboken, US: Wiley-IEEE Press, 2014.
- [23] Mendel J M. Type-2 fuzzy sets and systems: an overview[J]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2007, 2(1): 20-29.
- [24] 许允, 潘慕绚, 黄金泉. 基于智能特征提取的模糊建模及鲁棒控制[J]. *航空动力学报*, 2021, 36(7): 1545-1555.
- Xu Yun, Pan (Mu)(Xuan|Xun), Huang Jinquan. Fuzzy modeling and robust control based on intelligent feature extraction method [J]. *Journal of Aerospace Power*, 2021, 36(7): 1545-1555. (in Chinese)
- [25] 仇小杰, 陈杰, 范白清. 基于动态特性分析的涡扇发动机 T-S 模糊建模[J]. *推进技术*, 2023, 44(1): 22010038.
- Qiu Xiaojie, Chen Jie, Fan Baiqing. A method based on dynamic characteristic analysis for turbofan engine T-S fuzzy model[J]. *Journal of Propulsion Technology*, 2023, 44(1): 22010038. (in Chinese)
- [26] 曾山. 模糊聚类算法研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2012.
- Zeng Shan. Research on fuzzy clustering algorithm[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2012. (in Chinese)
- [27] Zhang Wei, Xue Xiangyang, Lu Hong, et al. Discriminant neighborhood embedding for classification[J]. *Pattern Recognition*, 2006, 39(11): 2240-2243.
- [28] Li Bo, Lei Lei, Zhang Xiaoping. Constrained discriminant neighborhood embedding for high dimensional data feature extraction[J]. *Neurocomputing*, 2016, 173: 137-144.
- [29] 路梅, 李凡长. 邻域嵌入的张量学习[J]. *计算机科学与探索*, 2017, 11(7): 1102-1113.
- Lu Mei, Li Fanchang. Neighborhood-embedded tensor learning[J]. *Journal of Frontiers of Computer Science & Technology*, 2017, 11(7): 1102-1113. (in Chinese)
- [30] Gou Jianping, Yi Zhang. Locality-based discriminant neighborhood embedding[J]. *The Computer Journal*, 2013, 56(9): 1063-1082.
- [31] Zhang Wei, Xue Xiangyang, Sun Zichen, et al. Metric learning by discriminant neighborhood embedding[J]. *Pattern Recognition*, 2008, 41(6): 2086-2096.
- [32] Mittal K, Jain A, Vaisla K S, et al. A comprehensive review on type 2 fuzzy logic applications: Past, present and future[J]. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2020, 95: 103916.
- [33] Mendel J M, John R I B. Type-2 fuzzy sets made simple[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2002, 10(2): 117-127.
- [34] 伍冬睿, 曾志刚, 莫红, 等. 区间二型模糊集和模糊系统: 综述与展望[J]. *自动化学报*, 2020, 46(8): 1539-1556.
- Wu Dongrui, Zeng Zhigang, Mo Hong, et al. Interval type-2 fuzzy sets and systems: overview and outlook[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2020, 46(8): 1539-1556. (in Chinese)
- [35] Franklin G F, Powell J D, Emami-naeini A. Feedback control of dynamic systems[M]. 8th ed. Hoboken, US: Pearson, 2015.
- [36] Aggarwal C C, Reddy C K. Data clustering: algorithms and applications[M]. New York: Chapman & Hall/CRC, 2014.
- [37] Pedregosa F, Varoquaux G, Gramfort A, et al. Scikit-learn: machine learning in Python[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2011, 12: 2825-2830.
- [38] 李志虎. 变循环发动机机载实时模型研究[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2021.
- Li Zhihu. On-board real time model for variable cycle engine[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2021. (in Chinese)
- [39] 罗兴华, 耿佳, 李明, 等. 航空发动机机载模型迭代计算优化方法研究[J]. *系统仿真学报*, 2022, 34(12): 2649-2658.
- Luo Xinghua, Geng Jia, Li Ming, et al. Research on iterative calculation and optimization methods of aero-engine on-board model [J]. *Journal of System Simulation*, 2022, 34(12): 2649-2658. (in Chinese)

(编辑: 秦理曼)