

DGSEM 框架内基于熵黏性的两相流耦合求解方法

张天翼, 郝世熙, 赵 明, 刘正先
(天津大学 机械工程学院, 天津 300350)

摘 要: 在可压缩两相流数值模拟中为解决激波、物质界面等间断问题导致的精度下降和 Gibbs 等现象, 实现间断的精确解析, 提出一种基于间断谱元法 (discontinuous Galerkin spectral element method, DGSEM) 框架的耦合方法。该方法通过熵黏性模型自动区分激波与接触间断, 自适应地添加人工黏性解决单相间断问题; 并基于 DGSEM 方法离散水平集 (level-set) 方程, 结合虚拟流体方法实现了两相界面的准确追踪以及与流场的耦合求解。结果表明该方法在光滑区域可以达到设计精度, 相比变量阶跃型人工黏性和 5 阶 weighted essentially non-oscillatory-Z (WENO-Z) 格式, 减少了过耗散得到了更多流场细节; 在仅使用 1/4 网格密度的情况下, 得到的监测点数据与实验结果的误差比同样采用间断有限元但使用耗散类型界面模型的计算结果最多降低了 6.4%, 证明该方法有效提升了间断捕捉和与物质界面追踪的精度。

关 键 词: 多相流; 激波捕捉; DGSEM; 熵黏性; level-set 方法; 虚拟流体方法
中图分类号: V228.3 **文献标志码:** A

Coupled two-phase flow solver based on entropy viscosity within DGSEM framework

Zhang Tianyi, Hao Shixi, Zhao Ming, Liu Zhengxian

(School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: To deal with the issues of accuracy degradation and Gibbs phenomena caused by discontinuities such as shock waves, contact discontinuities, and free interfaces in the numerical simulation of compressible two-phase flows, a coupled solution method was developed based on the discontinuous Galerkin spectral element method (DGSEM) framework. To address the issue of discontinuities in single phase, an entropy viscosity model that can automatically distinguish shocks from contact discontinuities and adaptively add artificial viscosity was introduced. The solution method was also coupled with the level-set method, which was discretized by the DGSEM framework and combined with the ghost fluid approach to accurately track the material interface and solve the flow field simultaneously. Numerical results showed that this method can achieve the designed accuracy in smooth regions. Compared with the variable-step artificial viscosity and the fifth-order weighted essentially non-oscillatory-Z (WENO-Z) scheme, it reduced over-dissipation and obtained more flow-field details. Compared with calculations using the same discontinuous Galerkin method but with dissipative interface models, this method reduced the error at monitoring points by up to 6.4% compared with experimental results when using only one-fourth of the

收稿日期: 2025-01-14

基金项目: 国家重点研发计划(2022YFB2402800); 国家自然科学基金面上项目(12372289); 天津市重点基金(22JCZDJC00910)

作者简介: 张天翼(1999—), 男, 硕士生, 主要从事计算流体力学研究。

通信作者: 赵明(1985—), 男, 副教授、博士生导师, 博士, 主要从事计算流体力学研究。E-mail: ming.zhao@tju.edu.cn

引用格式: 张天翼, 郝世熙, 赵明, 等. DGSEM 框架内基于熵黏性的两相流耦合求解方法[J]. 航空动力学报, 2026, 41(8): 20250022. Zhang Tianyi, Hao Shixi, Zhao Ming, et al. Coupled two-phase flow solver based on entropy viscosity within DGSEM framework[J]. Journal of Aerospace Power, 2026, 41(8): 20250022.

grid density. This proved that the method can effectively improve the accuracy of discontinuity capture and material interface tracking.

Keywords: multiphase flow; shock capturing; DGSEM; entropy viscosity; level-set method; ghost fluid method

间断有限元方法(discontinuous Galerkin, DG)是一种求解偏微分方程的数值方法,最早由 Reed 与 Hill^[1]提出,在计算流体力学等领域有着广泛的应用。传统的模态 DG(modal DG)方法仅能在笛卡尔网格的情况下保持其质量矩阵的对角性。间断谱元法(discontinuous Galerkin spectral element method, DGSEM)^[2-3]作为一种特殊的节点(nodal)形式的 DG 方法,可以有效保证其质量矩阵的对角性,从而构建较为高效的显式格式。

可压缩两相流的数值模拟中会遇到多种间断问题,其中两类尤为重要。一类是单相流体中的激波等强间断现象。这类现象对数值方法的鲁棒性有着较高的要求。单纯的 DG 格式在遇到此类间断时会产生 Gibbs 现象从而产生非物理振荡影响其计算精度甚至导致计算结果不收敛^[4]。另一类是由于流场中存在多种流相之间的自由运动界面,其界面两侧的法向速度和压力连续而密度存在间断;但区别于单相接触间断,物质界面两侧的流体状态方程也不同,这要求数值方法能够跟踪物质界面,从而选择合适的状态方程进行求解^[5-6]。本文旨在 DGSEM 框架内发展一种可以解决含有上述两类间断问题的高精度数值模拟方法。

DGSEM 格式在遇到激波等强间断现象时需要配合间断捕捉技术。应用较为广泛的间断捕捉技术有斜率限制器、人工黏性等方法。但是总变差减小(TVD)限制器会影响光滑区域的精度^[7-8],总变差有界(TVB)限制器严重依赖于经验参数^[9-10],加权本质无振荡(WENO)限制器会损失 DG 格式的紧致性,而传统基于变量阶跃^[11]或者模态衰减^[12]的人工黏性通常严重依赖于经验参数。Guermond 等在文献[13]中提出的基于熵增的熵黏性方法则可以在光滑区域保证理论上最优精度的同时在强间断区域施加适量的耗散。另外,它可以自动区分接触间断和激波,从而实现较为理想的激波捕捉效果。本文在 DGSEM 的框架下实现基于熵黏性的间断捕捉方法,并与变量阶跃型的人工黏性进行对比。

针对多相流动物质界面问题,Hirt 与 Nichols^[14]提出体积分数(VOF)方法定位物质界面,但其分

辨率较差并且由于依赖于界面重构导致其对于界面几何信息(界面曲率、法向量等)的计算准确性较差^[15]。Osher 与 Sethian^[16]提出了水平集(level-set)方法。该方法通过一个连续函数的零等值面来代表界面的位置,通过外部输入速度场驱动该函数随流体运动,将间断问题化为连续函数求解。该方法有效提高了界面捕捉的精度。但同时由于其被速度场直接驱动的性质导致其对间断附近垂直于界面的法向速度振荡较为敏感^[17],也对求解流场的数值方法提出了更高的要求。本文着眼于在高精度 DGSEM 框架内解决含有间断的可压缩两相问题,将熵黏性与 DGSEM 方法结合实现了激波捕捉,发展了一种基于 DGSEM 方法的 level-set 方程离散方法,通过虚拟流体(ghost fluid)方法^[18]将 level-set 方程与流场的控制方程耦合求解,并且结合基于熵黏性的激波捕捉技术实现了含有间断的可压缩两相问题的求解。

1 DGSEM 理论框架

1.1 控制方程

欧拉方程可写为:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{U}$ 为无量纲守恒变量, t 为时间, $\mathbf{F}^c$ 为无黏通量。为确保本方法在激波区域的稳定性,在欧拉方程中引入拉普拉斯型人工黏性通量:

$$\mathbf{F}^s = \mu_\epsilon \nabla \mathbf{U} \quad (2)$$

其中 μ_ϵ 为人工黏性系数。得到:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}^c(\mathbf{U}) - \nabla \cdot \mathbf{F}^s(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

记 $\mathbf{F} = \mathbf{F}^c - \mathbf{F}^s$, 则引入人工黏性的欧拉方程可写为:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{0} \quad (4)$$

1.2 空间离散

设计算域为 Ω , 记 Ω 的外边界为 Γ , κ 为 Ω 内非重叠单元的集合, 则可定义有限元空间 V_h :

$$V_h = \{v_h \in [L^2(\Omega)]^m : v_h|_K \in [V_p^m], \forall K \in \Omega\} \quad (5)$$

其中 $L^2(\Omega)$ 表示在 Ω 内的勒贝格平方可积函数空间, V_p^m 表示子空间内的 m 维 p 阶多项式。基函数选用拉格朗日插值多项式。在一维参考空间中, 单元 κ_j 中的第 i 个基函数 φ_i 可写为:

$$\varphi_i = L_p(\xi) \quad (6)$$

其中 L_p 为 p 阶拉格朗日插值函数, ξ 为局部坐标。多维情况下的基函数为一维基函数的张量积。二维参考空间内的变量 $\mathbf{U}$ 可通过基函数近似展开为:

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{U}_h = \sum \mathbf{u}_h \varphi_h = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p \mathbf{u}_{i,j} L_i(\xi) L_j(\eta) \quad (7)$$

其中 $\mathbf{u}_h = \mathbf{u}_{i,j}$ 为拉格朗日插值节点处的变量值, 即 nodal 单元内的自由度。取基函数为测试函数, 与式(4)相乘后在 Ω 内积分, 得到:

$$\int_{\kappa} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} \varphi_h d\kappa + \int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}_h) \varphi_h d\kappa = \mathbf{0} \quad (8)$$

对式(8)中空间导数项进行分部积分, 得到 DGSEM 的空间半离散方程:

$$\int_{\kappa} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} \varphi_h d\kappa - \int_{\kappa} \mathbf{F}(\mathbf{U}_h) \nabla \varphi_h d\kappa + \int_{\partial \kappa} \mathbf{F}(\mathbf{U}_h) \cdot \mathbf{n} \varphi_h d(\partial \kappa) = \mathbf{0} \quad (9)$$

其中 $\mathbf{n}$ 为单位外法向量。设坐标变换的映射为:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases} \quad (10)$$

则式(9)中的微分元可写为:

$$d\kappa = dx dy = |\mathbf{J}_{\kappa}| d\xi d\eta \quad (11)$$

其中, 雅克比矩阵 $\mathbf{J}_{\kappa}$ 可写为:

$$\mathbf{J}_{\kappa} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(9)中测试函数的梯度可写为:

$$\nabla \varphi_h = (\mathbf{J}_{\kappa}^{-1})^T \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right]^T \quad (13)$$

式(9)中的单元边界无黏通量 $\mathbf{F}(\mathbf{U}_h) \cdot \mathbf{n}$ 通过 local Lax-Friedrichs 格式计算, 单元边界的人工黏性通量取单元平均值^[19]。

1.3 时间离散

式(9)中的时间导数项选用 3 阶显式 TVD

(total variation diminishing) 龙格-库塔格式进行离散^[4], 可以写为:

$$\int_{\kappa} \frac{\partial \mathbf{U}_h}{\partial t} \varphi_h d\kappa = \mathbf{R}(\mathbf{U}_h) \quad (14)$$

其中 $\mathbf{R}(\mathbf{U}_h)$ 定义为:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h) = \int_{\kappa} \mathbf{F}(\mathbf{U}_h) \nabla \varphi_h d\kappa - \int_{\partial \kappa} \mathbf{F}(\mathbf{U}_h) \cdot \mathbf{n} \varphi_h d(\partial \kappa) \quad (15)$$

定义质量矩阵 $\mathbf{M}$ 的分量 $M_{i,j}$ 为:

$$M_{i,j} = \int_{\kappa} \varphi_h d\kappa \quad (16)$$

单元自由度组成的列向量为:

$$\mathbf{U}_{\kappa} = [u_0, u_1, \dots, u_p]^T \quad (17)$$

则式(14)可写为:

$$\mathbf{M} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}_{\kappa} = \mathbf{R}(\mathbf{U}_{\kappa}) \quad (18)$$

将式(11)代入式(16), 得到:

$$M_{i,j} = \int_{\kappa} \varphi_h |\mathbf{J}_{\kappa}| d\xi d\eta \quad (19)$$

设式(7)中选用的拉格朗日插值函数插值点数为 k , 本文除精度验证外, 所有算例均取 $k=3$ 。在单元内选用高斯-勒让德积分点进行数值积分。区别于一般的节点型间断有限元, DGSEM 格式的插值节点也选用高斯-勒让德积分点。由于拥有 k 个积分点的高斯-勒让德积分可以精确积分 $2k-1$ 阶及以下的多项式, 所以当 $|\mathbf{J}_{\kappa}|$ 为多项式且阶数小于等于 k 时质量矩阵可由上述高斯-勒让德积分精确求出。又由拉格朗日插值函数的性质可知, $\mathbf{M}$ 矩阵严格对角, 且

$$M_{i,i} = \omega_i |\mathbf{J}_{\kappa}| \quad (20)$$

其中, ω_i 为高斯-勒让德积分点的权重。

通过龙格-库塔格式对式(18)中的时间导数项进行离散, 其中 $\mathbf{U}_{\kappa}$ 代表所有单元中的自由度列向量。

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{\kappa}^{n,1} &= \mathbf{U}_{\kappa}^n + \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{U}_{\kappa}^n) \\ \mathbf{U}_{\kappa}^{n,2} &= \frac{3}{4} \mathbf{U}_{\kappa}^n + \frac{1}{4} \mathbf{U}_{\kappa}^{n,1} + \frac{1}{4} \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{U}_{\kappa}^{n,1}) \\ \mathbf{U}_{\kappa}^{n+1} &= \frac{1}{3} \mathbf{U}_{\kappa}^n + \frac{2}{3} \mathbf{U}_{\kappa}^{n,2} + \frac{2}{3} \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{R}(\mathbf{U}_{\kappa}^{n,2}) \end{aligned} \quad (21)$$

其中上标“ n ”代表第 n 个时间步, “ $n,1$ ”与“ $n,2$ ”代表中间时间步。

2 基于熵黏性的激波捕捉方法

为解决可压缩两相流动问题中的激波等强间断问题,本文在 DGSEM 框架内植入了熵黏性模型^[13],本章介绍对激波处理的具体策略,并通过光滑问题的精度验证和包含强间断的一维 Sod 问题算例以及二维 Riemann 问题算例来展示方法的有效性,并与变量阶跃型人工黏性^[11]进行对比。

2.1 黏性系数

式(2)中 μ_e 为人工黏性系数,用于在不同区域调节人工黏性的大小从而实现激波捕捉,并在激波附近施加足够的耗散用于限制数值解的非物理振荡。本文在 DGSEM 的框架内植入熵黏性模型,该模型由 Guermond 等在文献 [13] 中提出,通过计算单元熵增控制人工黏性的添加量,从而自动区分激波和接触间断,并在光滑区域保持高精度。

熵不等式如下:

$$Q(U_h) = \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot F^e(E) \geq 0 \quad (22)$$

其中 Q 为熵产生率, E 为熵函数, $F^e(E)$ 为熵通量, $E = E(U_h)$, 满足式(22)的一对 $E(U_h)$ 、 $F^e(E)$ 称为熵对。在求解欧拉方程的情况下,取

$$\begin{cases} E = \frac{\rho}{\gamma-1} \ln\left(\frac{\tilde{p}}{\rho^\gamma}\right) \\ F = u \cdot E \end{cases} \quad (23)$$

其中 ρ 为流体密度, $\tilde{p}$ 为压力, γ 为比热比, u 为速度矢量。

在光滑区域,式(22)右侧取等号;位于激波附近时,式(22)右侧取大于号。参考文献 [13],人工黏性系数可由如下方法算出:

$$\mu_{EV} = \left(\frac{h}{2\hat{p}}\right)^2 \max \left\{ \max_{x \in P(\kappa)} |Q(U_h)|, \max_{x \in P(\partial\kappa)} |H(U_h)| \right\} \quad (24)$$

其中, h 为网格尺度, $\hat{p}$ 为阶数, $x \in P(\kappa)$ 表示单元内部的高斯-勒让德积分点, $x \in P(\partial\kappa)$ 为单元边界上的高斯-勒让德积分点。 $Q(U_h)$ 由式(22)求得, $H(U_h)$ 表示单元边界的熵通量阶跃:

$$H(U_h) = \frac{\hat{p}}{h} n \cdot [F^e(E)] \quad (25)$$

其中, $[\sim]$ 表示单元边界处的阶跃。为了避免人工黏性过大,对式(24)所求得的人工黏性系数设置上界:

$$\mu_e = \min \left\{ \mu_{EV}, C_{\max} \frac{h}{\hat{p}} \max_{x \in P(\kappa)} |F'(U_h)| \right\} \quad (26)$$

其中 $F'(U_h)$ 为对应位置的最大波速, $C_{\max}$ 为可调参数,本文取为 0.25。

2.2 精度验证

本文所有算例中均为无量纲变量。选取正弦波算例进行测试,计算域为一维 $x \in [0,1]$,初始条件设置为 $[\rho, u, p] = [1 + 0.2\sin(\pi x), 1.0, 1.0]$, 其中 u 为 x 方向的速度,边界条件为周期边界条件, $\gamma = 1.4$ 。

表 1、表 2 分别给出了是否添加人工黏性的计算结果,计算中取 $t=1$ 。根据 Zhang 等在文献 [20] 中的论证,插值点数为 k 时数值精度也为 k 。正弦波算例测试结果中,不添加人工黏性与添加人工黏性的结果均能达到 k 阶设计精度^[19],且是否添加人工黏性对于 L_2 误差以及收敛率的影响较小。说明本文所植入的熵黏性模型可以保证光滑区域的计算结果达到设计精度。

表 1 正弦波测试算例(有人工黏性)

Table 1 Sine wave test case (with artificial viscosity)

网格量	$k=3$		$k=4$	
	L_2 误差	收敛率	L_2 误差	收敛率
20	9.98199×10^{-4}		2.24598×10^{-5}	
40	1.26448×10^{-4}	2.98	1.24348×10^{-6}	4.18
80	1.57069×10^{-5}	3.00	7.59415×10^{-8}	4.03
160	1.95116×10^{-6}	3.02	4.7153×10^{-9}	4.00

表 2 正弦波测试算例(无人工黏性)

Table 2 Sine wave test case (without artificial viscosity)

网格量	$k=3$		$k=4$	
	L_2 误差	收敛率	L_2 误差	收敛率
20	9.24106×10^{-4}		2.01887×10^{-5}	
40	1.22672×10^{-4}	2.91	1.20678×10^{-6}	4.06
80	1.55342×10^{-5}	2.98	7.54001×10^{-8}	4.00
160	1.94273×10^{-6}	3.00	4.70908×10^{-9}	4.00

2.3 一维 Sod 问题

一维 Sod 问题^[21]是一个典型的 Riemann 问题。问题描述了激波管中的一侧有较高的压力和密度,而另一侧则具有较低的压力和密度。两个区域之间由一个隔板分隔;当隔板被移除后,两个区域的气体会迅速混合,并且在这一过程中会产生激波、膨胀波和接触间断等现象。该问题包含一个左向的稀疏波、一个右行的激波以及位于

两者之间的接触间断,可以有效检测算法的鲁棒性和准确性。

设置计算域为一维 $x \in [-1, 1]$, 初始条件为:

$$[\rho, u, p] = \begin{cases} [1.0, 0, 1.0] & (x < 0) \\ [0.125, 0, 0.1] & (x > 0) \end{cases} \quad (27)$$

图 1 展示了一维 Sod 问题 $t = 0.5$ 时本文熵黏性 DGSEM 计算结果与精确解的对比。计算域划分为 100 个单元, 显示结果为单元平均值。结果表明熵黏性模型可以在强间断附近得到较好的限制效果, 并且在网格较为稀疏的情况下解析较为清晰的激波。

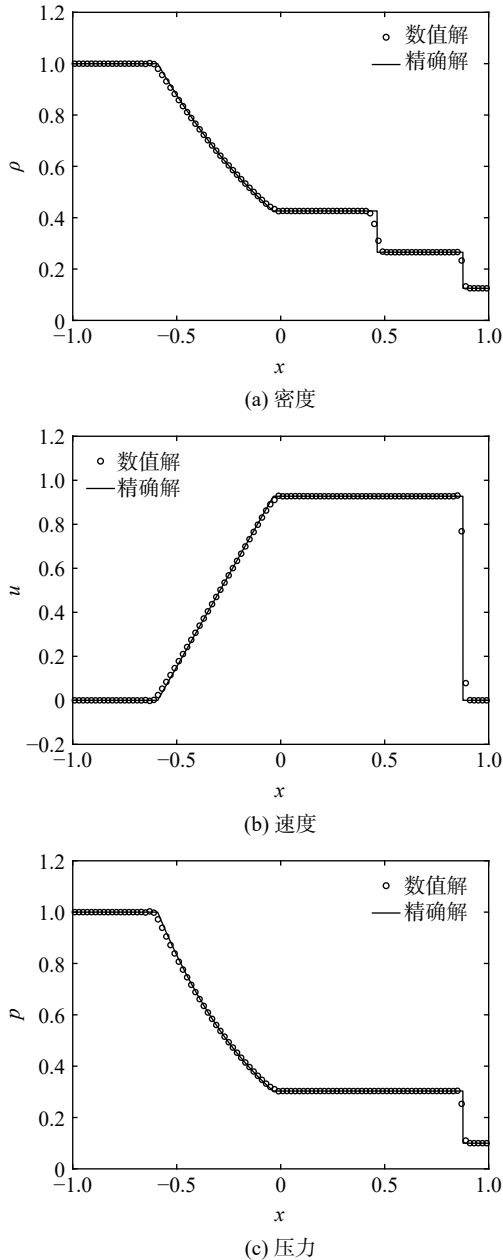


图 1 一维 Sod 问题 ($t=0.5$)

Fig. 1 One-dimensional Sod's problem ($t=0.5$)

2.4 二维 Riemann 问题

二维 Riemann 问题为一维 Riemann 问题的扩展。问题描述了不同初始间断在演变过程中产生的不同波系。该问题初始条件、边界条件较为简单, 产生的流动结构较为复杂, 便于对数值方法本身的性能进行探究, 具有较强的代表性。将 2.3 中的问题拓展为二维并设置不同的初始条件^[22], 设置计算域为 $x, y \in [0, 1]$, 二维 Riemann 问题 1 的初始条件设置为:

$$[\rho, u, v, p] = \begin{cases} [1.0, -0.75, 0.5, 1.0] & (x < 0.5, y < 0.5) \\ [2.0, 0.75, 0.5, 1.0] & (x < 0.5, y > 0.5) \\ [3.0, -0.75, 0.5, 1.0] & (x > 0.5, y < 0.5) \\ [1.0, 0.75, -0.5, 1.0] & (x > 0.5, y > 0.5) \end{cases} \quad (28)$$

其中 u, v 分别表示 x, y 方向的速度。

式(28)将计算域划分为 4 个区域, 区域之间为初始的 4 道接触间断(压力和法向速度均连续), 在初始速度场的驱动下形成涡旋结构。该问题可以检验数值方法对于接触间断的捕捉能力。图 2 给出本文 DGSEM 框架内熵黏性激波捕捉方法 (100×100 网格) 的计算结果(密度云图)。该方法可以在较少的网格下捕捉到接触间断之间相互作用产生的涡结构。

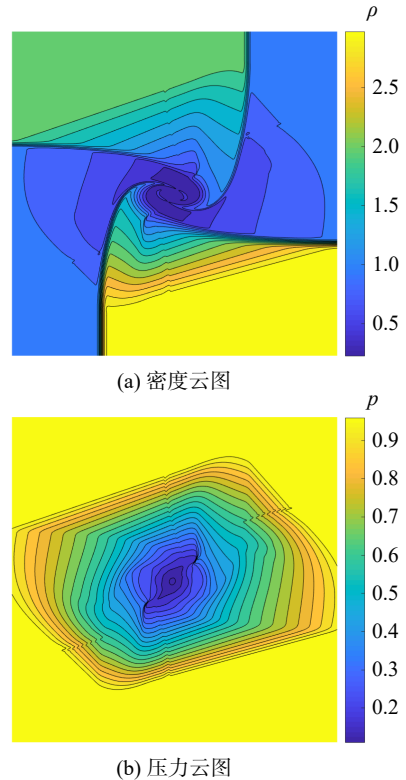


图 2 二维 Riemann 问题 1 ($t=0.3$)

Fig. 2 Two-dimensional Riemann problem 1 ($t=0.3$)

二维 Riemann 问题 2 的初始条件设置为:

$$[\rho, u, v, p] = \begin{cases} [0.8, 0.1, -0.3, 0.4] & (x < 0.5, y < 0.5) \\ [0.5197, -0.6259, -0.3, 0.4] & (x < 0.5, y > 0.5) \\ [0.5313, 0.1, 0.4276, 0.4] & (x > 0.5, y < 0.5) \\ [1.0, 0.1, -0.3, 1.0] & (x > 0.5, y > 0.5) \end{cases} \quad (29)$$

二维 Riemann 问题 2 的 4 个区域中第 3 个区域与第 4 个区域之间为一道初始激波, 第 4 个区域和第 2 个区域之间为一道稀疏波, 其余两处间断为接触间断。网格划分为 200×200 均匀网格, 图 3 展示了 $t = 0.2$ 时刻的计算结果, 其中图 3(b) 将接触间断区域局部放大并与文献 [11] 中的变量阶跃型人工黏性的计算结果进行了对比。熵黏性通过熵残差直接定义黏性系数, 由于熵增在激波附近较大而在接触间断附近为 0, 熵黏性可以区分激波与接触间断^[20]。相较于变量阶跃型人工黏性的计算结果, 熵黏性在保证鲁棒性的同时在接触间断附近添加较少的耗散从而实现了对于接触间断较为准确的捕捉。

下面进行第 3 个较为复杂的二维 Riemann 算例^[23], 计算域依旧保持为 $x, y \in [0, 1]$, 初始条件:

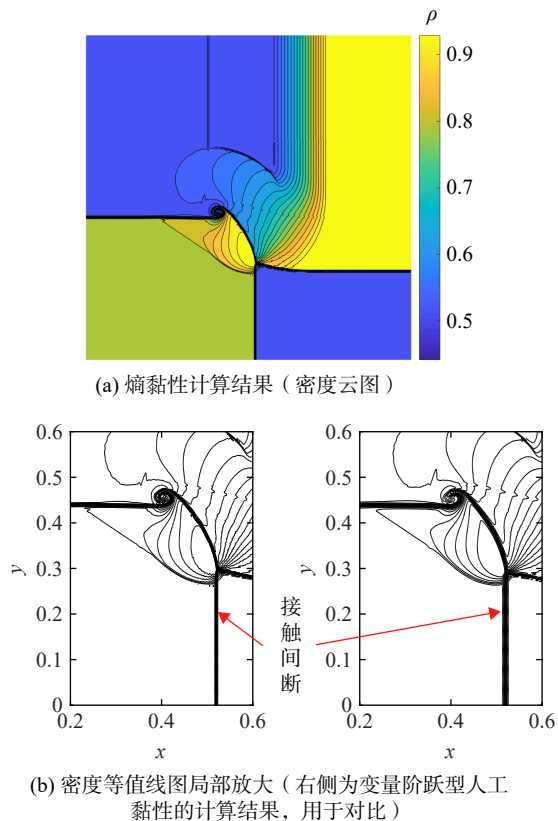


图 3 二维 Riemann 问题 2 计算结果 ($t=0.2$)

Fig. 3 Result of two-dimensional Riemann problem 2 ($t=0.2$)

$$[\rho, u, v, p] =$$

$$\begin{cases} [0.138, 1.206, 1.206, 0.029] & (x < 0.8, y < 0.8) \\ [0.5323, 1.206, 0.0, 0.3] & (x < 0.8, y > 0.8) \\ [0.5313, 0.0, 1.206, 0.3] & (x > 0.8, y < 0.8) \\ [1.5, 0.0, 0.0, 1.5] & (x > 0.8, y > 0.8) \end{cases} \quad (30)$$

该算例包含 4 道运动激波, 对数值方法的鲁棒性要求较高。将计算域划分为 400×400 网格, 图 4 为 $t = 0.8$ 时刻的模拟结果。

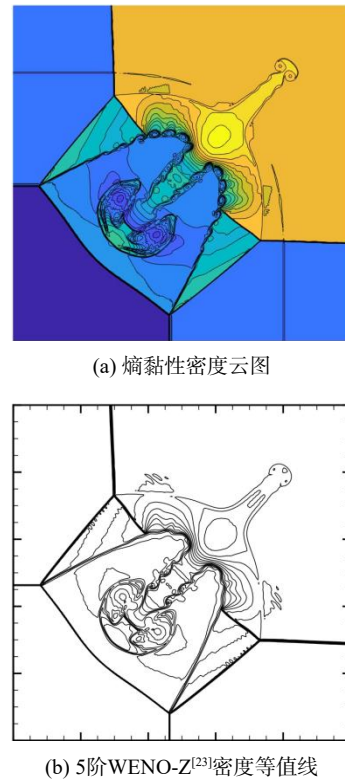


图 4 二维 Riemann 问题 3 计算结果 ($t=0.8$)

Fig. 4 Result of two-dimensional Riemann problem 3 ($t=0.8$)

图 4(a) 为本文基于 DGSEM 框架的熵黏性激波捕捉方法计算结果, 较为细致地捕捉到了激波相互作用形成的复杂涡结构。相比于图 4(b) 给出的文献 [23] 中相同网格量的 5 阶 WENO-Z 格式的计算结果, 本文的熵黏性可以抑制过耗散现象, 从而可以捕捉到较多的流场细节, 得到了更为清晰的涡结构。

3 基于 level-set 的两相流模拟

本章将基于 DGSEM 方法离散 level-set 方程并与欧拉方程耦合求解。通过 level-set 方程定位两相流动中的物质界面, 从而区分两相流中的不同相并分别通过各自的状态方程进行计算。本章将结合第 2 章中的熵黏性模型实现多相物质界面

与激波相互作用情况的稳定求解。

3.1 Level-set 方程的离散

Level-set 方程通过一个随流体运动的连续函数的零等值面来定位两相流动中的物质界面。本文在 DGSEM 框架下给出了一种结合了 local Lax-Friedrichs 格式的 level-set 函数的离散方式。设 ϕ 为 level-set 函数, 其初值为符号距离函数^[24], level-set 方程定义为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (31)$$

将式(31)左右两侧乘以测试函数, 并按照第 1 章中的离散方式进行分部积分, 得到 level-set 方程的空间半离散格式:

$$\int_{\kappa} \frac{\partial \phi}{\partial t} \varphi_h d\kappa + \int_{\partial \kappa} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \phi \varphi_h d(\partial \kappa) - \int_{\kappa} \phi (\nabla \cdot \mathbf{u} \varphi_h + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_h) d\kappa = 0 \quad (32)$$

式(32)面积分中的法向边界通量由 local Lax-Friedrichs 格式计算。

Level-set 函数 ϕ 可以写为守恒变量的一个分量, 从而式(31)可以与式(9)耦合求解。通过 level-set 函数的正负可以区分流体的不同相, 从而应用不同的状态方程进行计算; 然而, 简单地将两种流体一同计算(仅在不同的位置区分两种流体, 比如在每个积分点处判断 level-set 函数的正负从而应用不同的状态方程)会导致压力的计算结果产生非物理振荡^[25]。

这里通过移动界面问题检验 level-set 方程和欧拉方程的耦合求解精度, 该问题描述初始条件为 $u=1$ 的流场中, 一道初始的物质界面随着均匀的速度场运动的过程。计算域为 $x \in [-1, 1]$, 划分为 100 个单元, 移动界面问题的初始条件为:

$$[\rho, u, p, \gamma] = \begin{cases} [1.0, 1.0, 1.0, 1.4] & (x < 0) \\ [0.125, 1.0, 1.0, 1.6] & (x > 0) \end{cases} \quad (33)$$

图 5 中密度的计算结果与精确解较为相近但压力出现了较大的振荡, 其原因在于更新同一单元边界通量时有可能用到两个不同的状态方程, 并且不同于密度、能量等守恒变量, 状态方程的变化不存在由于存在耗散而形成的过渡区域, 导致过渡区域的压力出现非物理振荡^[25]。

3.2 Ghost fluid 方法

为了解决上述压力振荡问题, Fedkiw 等^[18]在

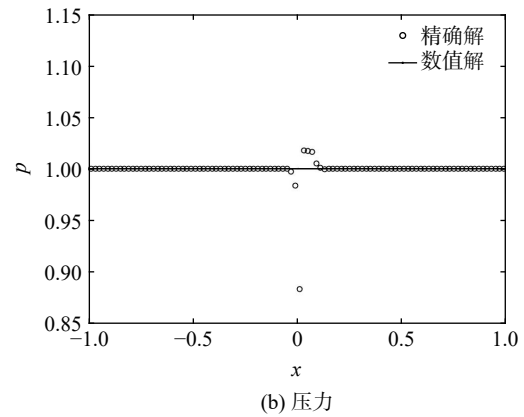
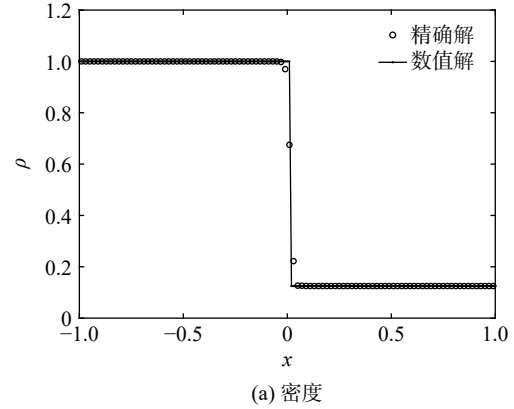


图 5 移动界面问题($t=0.0165$)

Fig. 5 Translate interface ($t=0.0165$)

有限差分的框架下提出了虚拟流体(ghost fluid)方法。以图 6 所示的一维问题为例, 参考文献[18]中的方法: 虚拟流体方法设置两个流场, 各代表两相流其中一相, 用各自的状态方程求解。两相分别为 A 相、B 相, 虚拟流体方法在每一个时间步求解两组守恒变量加一个 level-set 函数, 在每一个时间步进行如下两步操作:

- 1) 通过 level-set 函数的正负确定每一个积分点处实际流体是哪一相。
- 2) 若某一点处实际流体为 A 相, 则在代表 B 相的流场中使用 A 相的速度和压力数据修改该位置 B 相的流体信息, 反之亦然。

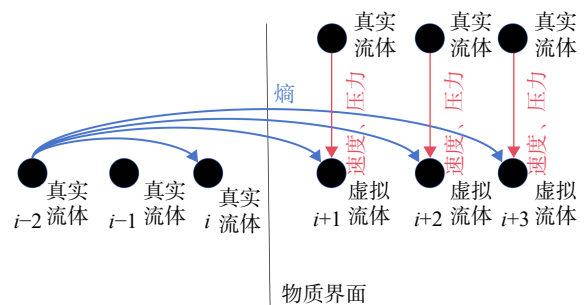


图 6 虚拟流体方法

Fig. 6 Ghost fluid method

上述两个步骤实际上为每一相的流体通过另一相的信息设置了边界条件,而那些被修改的充当边界条件的流体,称为虚拟流体。以上便是虚拟流体方法的基本思路,但步骤 2) 的具体实施仍需要进一步的解释;为了确保被修改的虚拟流体仅作为边界条件影响真实流体而不引入其他影响,并且为了抑制界面过热现象^[18],被修改的虚拟流体除了要从当地的真实流体中获取速度、压力信息,其自身的密度也将被修改。在一维情况下,如图 6 中所描述,计算界面右侧的虚拟流体信息时,将首先由界面左侧的第 $i-1$ 个单元算出该单元流体的熵,并通过第 $i-1$ 个单元的熵和真实流体的速度、压力信息计算出第 i 个到第 $i+3$ 个单元的全部守恒变量。

求解多维问题时,速度和压力的修改方式与一维问题相同,利用熵修正计算虚拟流体密度的步骤通过寻找界面所穿过单元的相邻单元,并对每个符合条件的相邻单元的单元平均值以单元面积为权重进行加权平均进而求得。

在加入了虚拟流体方法后,重新对图 5 中的移动界面问题进行模拟,结果如图 7 所示。虚拟流体方法有效消除了界面附近的压力振荡。由

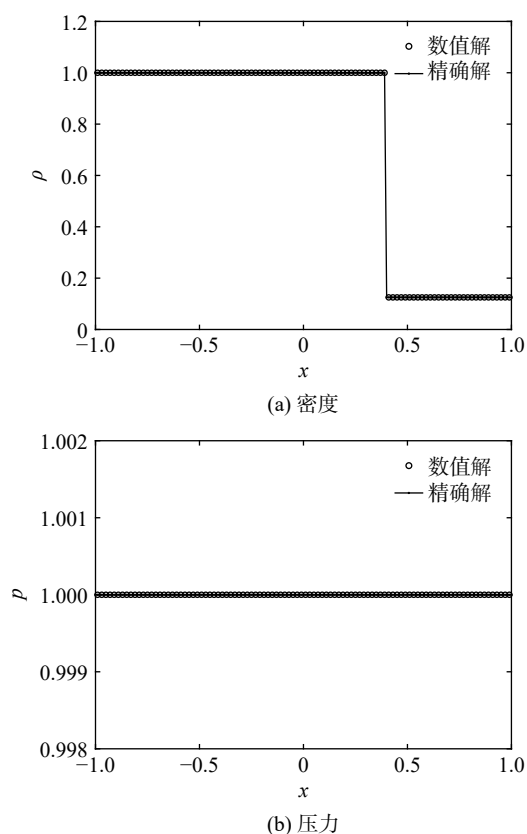


图 7 虚拟流体方法求解移动界面问题($t=0.4$)

Fig. 7 Translate interface solved by ghost fluid method ($t=0.4$)

于 level-set 函数也通过高精度 DGSEM 方法求解,可以将界面定位精度提高到单元内部、积分点之间,从而实现两相流动的准确解析。

3.3 激波-物质界面相互作用问题

为验证虚拟流体方法的正确性并检验其与熵黏性方法耦合求解的效果,在计算域 $x \in [-1, 1]$ 内设置一维问题^[18]:

$$[\rho, u, p, \gamma] = \begin{cases} [1.333, 1.0, 12.004, 1.4] & (x < -0.2) \\ [1.0, 0.0, 8.002, 1.4] & (-0.2 < x < 0) \\ [0.138, 0.0, 8.002, 1.67] & (x > 0) \end{cases} \quad (34)$$

该问题初始条件从左至右分为 3 个区域,其中间、右侧区域之间为一道初始的两相物质界面,左侧、中间区域之间为一道初始的右行激波。该问题描述了激波在传播过程中与物质界面发生相互作用的过程。在激波到达界面位置时,会产生反射的稀疏波和透射的激波。该问题计算域划分为 100 个单元。图 8 给出了 $t=0.3$ 时刻激波与物质界面接触产生透射和反射之后的结果。初始的物质界面在激波的作用下从 $x=0$ 位置运动到了 $x=0.072$ 处,图 8(b) 和图 8(c) 中的速度和压力在物质界面处无振荡,证明虚拟流体方法通过将两相分别计算再通过数据传递相互施加影响,解决了压力在物质界面附近的振荡问题。配合熵黏性,在受到激波影响之后压力的计算仍能保持稳定,验证了虚拟流体方法处理物质界面问题的有效性和鲁棒性。

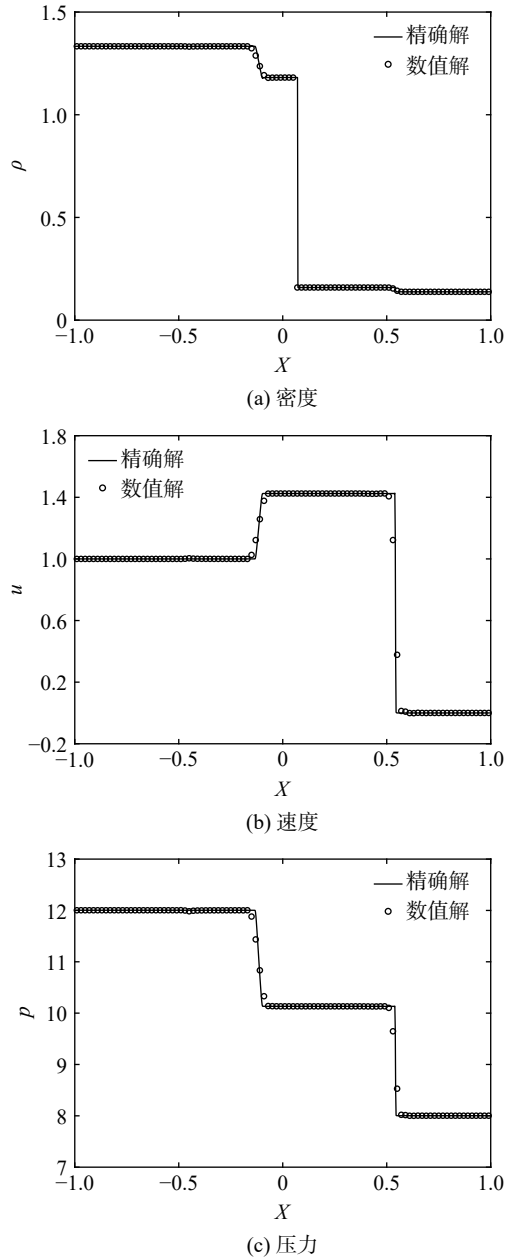
为进一步检验虚拟流体方法与熵黏性激波捕捉方法的耦合效果,设置两相 Sod 问题^[25]。该问题将 2.3 节中的单相 Sod 问题左右两侧区域设置为两种不同的气体,该问题描述了初始压力不同的两种气体在短时间内发生相互作用的过程。

两相 Sod 问题的计算域、网格划分与第 2 章中的单相 Sod 问题相同,初始条件变为:

$$[\rho, u, p, \gamma] = \begin{cases} [1.0, 0.0, 1.0, 1.4] & (x < 0) \\ [0.125, 0.0, 0.1, 1.6] & (x > 0) \end{cases} \quad (35)$$

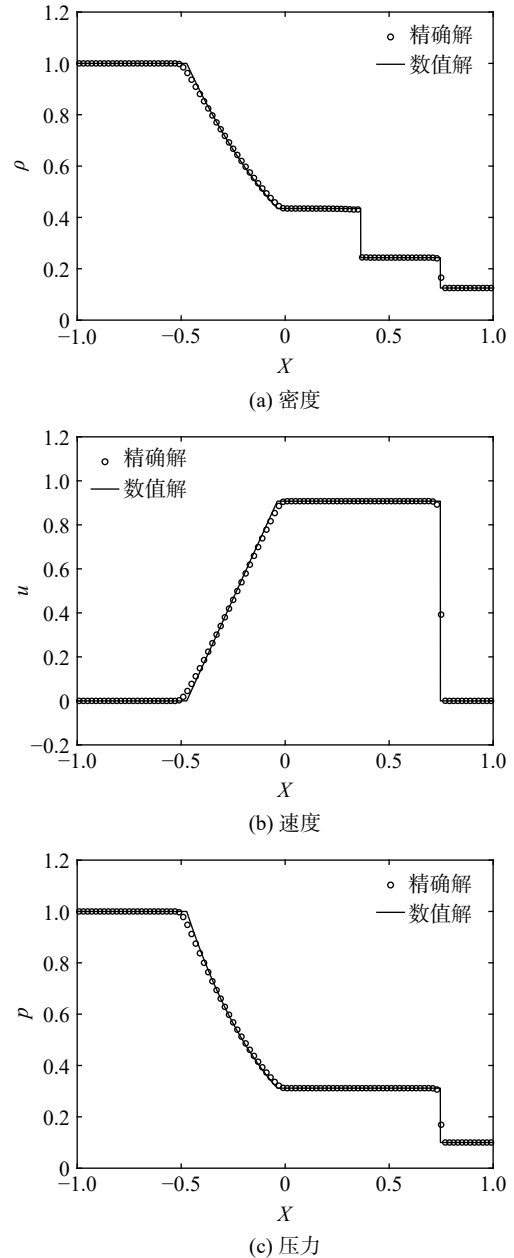
图 9 为 $t=0.4$ 时刻的计算结果(数值结果显示为单元平均值),其速度和压力在激波以及物质界面附近均无明显振荡,并且可以对物质界面进行子网格级别的定位,可以得到十分锐利的接触间断。

图 10 对比了是否添加熵黏性对于两相 Sod 问题计算结果的影响,其中数值结果显示为每个

图 8 激波-物质界面相互作用问题($t=0.3$)Fig. 8 Shock-free interface interaction problem ($t=0.3$)

单元的多项式解。

通过图 10(d)和图 10(f)中的对比观察到,单纯的 DG 格式在不添加人工黏性的情况下会在激波前缘、后缘均产生较大的非物理振荡,与精确解的误差较大。熵黏性的引入有效限制了激波前后缘的速度、压力振荡,在不过分抹平间断的前提下有效地提高了激波附近的精度和计算的鲁棒性。并且由于本算例中物质界面位于激波过后的区域,该区域受激波影响,速度、压力和密度均出现了较大变化;在无添加人工黏性的情况下整个激波过后的区域都会出现速度、压力和密度的波动。熵黏性有效地限制了该区域物理量的波动,

图 9 虚拟流体方法求解两相 Sod 问题($t=0.4$)Fig. 9 Sod's problem with double phase solved by ghost fluid method ($t=0.4$)

同时虚拟流体方法确保了物质界面的准确求解,两者耦合可以实现激波-物质界面相互作用问题的稳定求解。

3.4 二维两相问题

为验证本文方法在多维问题中的适用性,选取二维激波-气泡相互作用问题进行模拟。1987 年 Haas 等^[26]对该问题进行了实验。该问题描述一个空气中的充满 R22(一种制冷气体,密度大于空气)或氦气的圆形气泡被一道移动的激波所影响的过程。气泡直径为 0.5 cm,计算域设置为 $x, y \in [0, 0.1]$, 初始时刻气泡中心位于 (0.05, 0.05) 处,

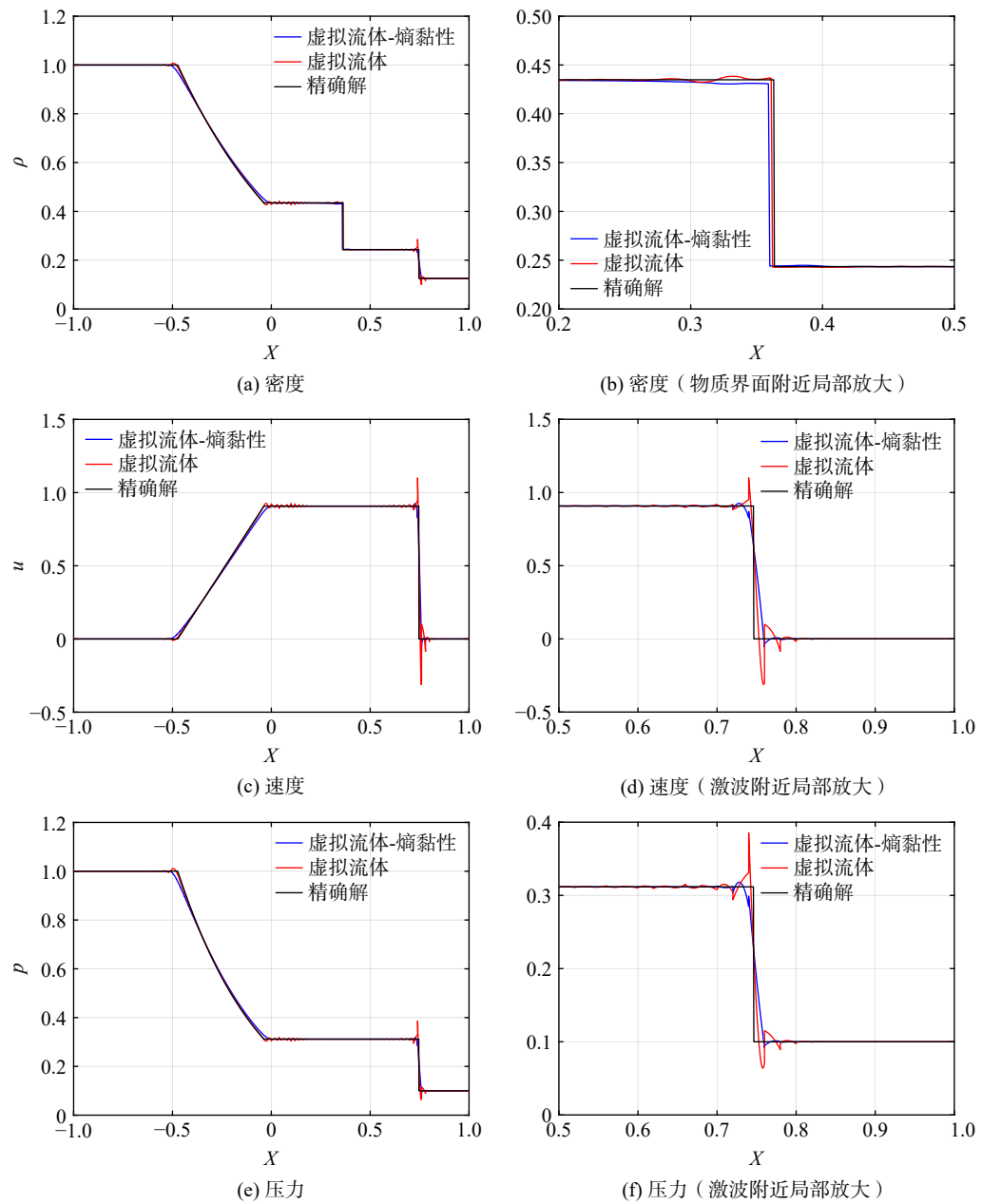


图 10 有无熵黏性的两相 Sod 问题($t=0.4$)

Fig. 10 Sod's problem with double phase with and without entropy viscosity ($t=0.4$)

激波位于 $x = 0.08$ 处, 初始条件经过归一化后设置如表 3, 初值的设置参考文献 [25]。

表 3 二维激波-气泡算例初值设置

Table 3 Initial condition setup of two-dimensional shock-bubble interaction					
气体	γ	ρ	u	v	p
波前空气	1.4	1.400 00	0	0	1.000 00
波后空气	1.4	1.926 91	0.333 61	0	1.569 80
氦气	1.648	0.254 63	0	0	1.000 00
R22	1.249	4.415 40	0	0	1.000 00

网格设置为 200×200 , 选取物理时间为 70、

105、140 μs 的结果, 在较短时间内可以认为气泡内部的 R22 气体没有和空气发生掺混, 适用本文所建立的方法。图 11 为 R22 气泡的模拟结果。R22 气体中的声速低于空气中的声速, 折射激波在 R22 气泡中的传播速度慢于入射激波在周围空气中的传播速度, 数值模拟结果中可以观察到与实验结果相同的波系。表 4 对实验结果和不同数值方法模拟的结果进行了定量对比, 选取了折射激波波速 c_r (测定于 $y = 0.05$ 处)、入射激波波速 c_s (测定于 $y = 0.1$ 处)、物质界面最右端点速度 c_i 进行对比, 结果取透射激波穿过气泡过程中的平均

值。表 4 的定量对比中, 本文所发展的方法与实验结果吻合较好, 由于本文的 level-set 方程采用了更高精度的离散格式, 获得了与实验结果更为贴近的数据, 入射激波的波速则与理论值 419m/s 相等。

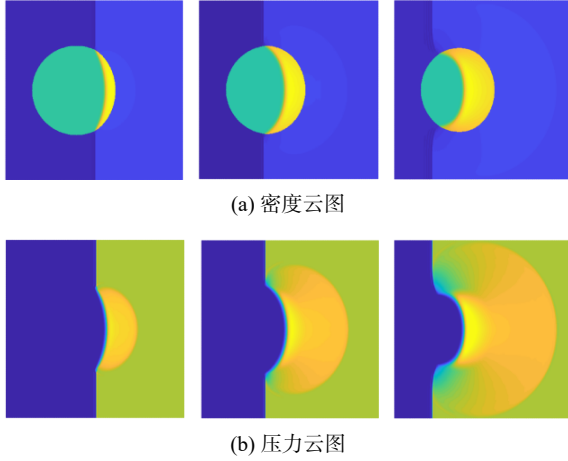


图 11 激波-R22 气泡相互作用

Fig. 11 Shock wave-R22 bubble interaction

表 4 激波-R22 气泡问题波速对比
Table 4 Wave speed comparison of shock wave-R22 bubble problem

方法	$c_s/(m/s)$	$c_r/(m/s)$	$c_i/(m/s)$
本文	419	239	73
Naber ^[25]	419	230	73
Quirk 和 Karni ^[27]	420	254	70
Wackers 和 Koren ^[28]	419	241	75
实验数据 ^[26]	415	240	73

图 12 展示了氦气泡物理时间为 70 μs 的密度等值线图, 氦气中的声速高于空气中的声速, 激波与气泡相互作用的结果为折射激波快速穿越气泡内部, 气泡迅速变形并在右侧区域形成膨胀波。

图 13 展示了激波-氦气泡相互作用的过程。与图 12 对比可知折射激波在氦气泡内部变为一道较弱的激波, 本文方法较为清晰地捕捉到了折射激波, 并且压力云图中的空气-氦气界面附近并无压力振荡, 虚拟流体方法在不模糊界面的前提下较好地捕捉到了空气-氦气界面。表 5 展示了激波-氦气泡算例的定量对比结果。

在本节两个二维算例的定量对比中, Naber 等采用了耗散类型的界面模型、 400×400 网格^[25], 而本文基于虚拟流体方法的非耗散界面模型仅用了 1/4 网格量, 得到了与实验值更加接近的模拟

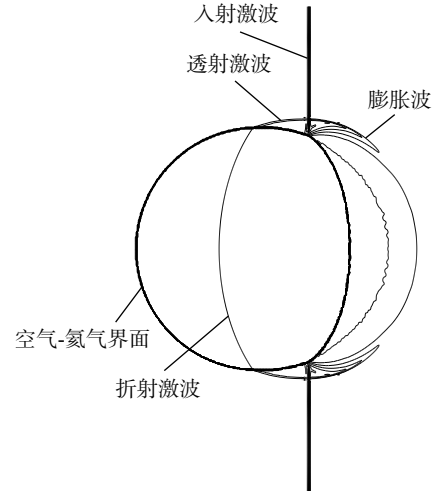


图 12 激波-氦气泡相互作用

Fig. 12 Shock wave-helium bubble interaction

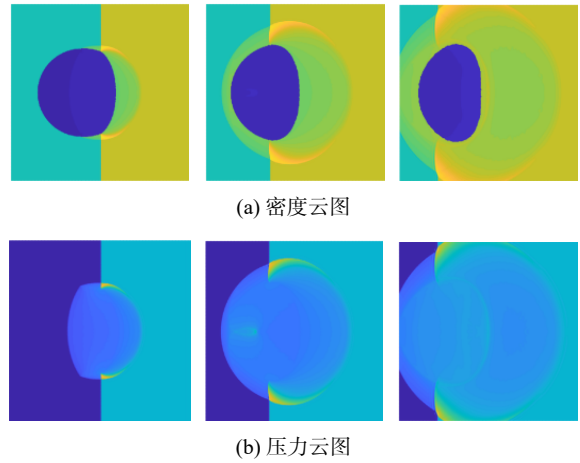


图 13 激波-氦气泡相互作用

Fig. 13 Shock wave-helium bubble interaction

表 5 激波-氦气泡问题波速对比
Table 5 Wave speed comparison of shock wave-helium bubble problem

方法	$c_s/(m/s)$	$c_r/(m/s)$	$c_i/(m/s)$
本文	419	897	180
Naber ^[25]	419	955	181
Quirk 和 Karni ^[27]	422	943	178
Wackers 和 Koren ^[28]	419	950	173
实验数据 ^[26]	410	900	170

结果, 各监测点数据与实验结果的平均误差降低了 1.8%, 体现了本文所发展方法的优越性。

4 结 论

本文以含有间断的可压缩两相问题的求解为目标, 在 DGSEM 框架内, 将研究内容分为两个部分展开。

首先,在 DGSEM 框架内首次实现了基于熵黏性的单相间断捕捉。相较于传统的人工黏性,熵黏性可以在不影响激波计算的鲁棒性和解析度的情况下得到更为清晰的接触间断,并且在较少依赖经验参数的情况下保证光滑区域的求解精度。

其次,在 DGSEM 框架内实现了基于 level-set 方程的两相流物质界面解析。相比于 Naber 等^[25]通过有限体积法离散 level-set 方程并通过修正解决压力振荡的方法,本文提供了一种高精度的界面追踪方法,并且通过虚拟流体方法消除了界面附近误差。DGSEM 离散 level-set 方程的高精度特性,以及熵黏性对流场求解的稳定作用,使得 level-set 函数无需重新初始化即可稳定且准确地追踪物质界面,从而实现两相流动的高精度求解。

将熵黏性与 level-set 方法耦合后,本文成功应用于求解多种激波-物质界面相互作用问题,捕捉到了较为清晰的两相物质界面以及激波结构;研究结果验证了在 DGSEM 框架内采用熵黏性与 level-set 方法耦合,能够有效提高两相流动问题的界面追踪精度和数值稳定性,证明了该方法的可行性和适用性。

本文的创新点在于在 DGSEM 框架内实现了熵黏性的激波捕捉方法和基于 level-set 方程的两相流动数值模拟方法的结合,提出了一种 level-set 方程的离散格式,并且成功应用于求解多种两相流动问题。

参考文献:

- [1] Reed W H, Hill T R. Triangular mesh methods for the neutron transport equation[R]. Los Alamos, US: Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [2] Kopriva D A. Implementing spectral methods for partial differential equations: algorithms for scientists and engineers[M]. Dordrecht, Netherlands: Springer Netherlands, 2009.
- [3] Bassi F, Franchina N, Ghidoni A, et al. Spectral p -multigrid discontinuous Galerkin solution of the Navier-Stokes equations[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2011, 67(11): 1540-1558.
- [4] Shu C W. Discontinuous Galerkin methods: general approach and stability[R]. Newport, US: the First International Symposium on Discontinuous Galerkin Methods, 1999.
- [5] 何志伟, 田保林, 李理, 等. 可压缩多介质流动问题的高精度数值模拟方法[J]. *空气动力学学报*, 2021, 39(1): 177-190. He Zhiwei, Tian Baolin, Li Li, et al. High-order numerical simulation method for compressible multi-material flow problems[J]. *Acta Aerodynamica Sinica*, 2021, 39(1): 177-190. (in Chinese)
- [6] 丁岩, 袁礼. 虚拟流体方法中界面处 Riemann 问题定义方式的改进[J]. *计算物理*, 2010, 27(4): 501-508. Ding Yan, Yuan Li. Improvements on definition of interfacial Riemann problem in real ghost fluid method[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2010, 27(4): 501-508. (in Chinese)
- [7] Cockburn B, Shu Chiwang. Runge-kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2001, 16(3): 173-261.
- [8] 赵雅甜, 阎超, 孙迪, 等. 新型三阶 TVD 限制器性能分析[J]. *北京航空航天大学学报*, 2017, 43(4): 800-805. Zhao Yatian, Yan Chao, Sun Di, et al. Performance analysis of a new-type third-order TVD limiter[J]. *Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics*, 2017, 43(4): 800-805. (in Chinese)
- [9] Cockburn B, Shu Chiwang. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II: general framework[J]. *Mathematics of Computation*, 1989, 52(186): 411.
- [10] Krivodonova L. Limiters for high-order discontinuous Galerkin methods[J]. *Journal of Computational Physics*, 2007, 226(1): 879-896.
- [11] Bassi F, Rebay S, Mariotti G, et al. A high-order accurate discontinuous finite element method for inviscid and viscous turbomachinery flows[C]//Proceedings of the 2nd European Conference on Turbomachinery Fluid Dynamics and Thermodynamics. Antwerp, Belgium: Technological Institute, 1997: 99-109.
- [12] Yu Jian, Hesthaven J S. A study of several artificial viscosity models within the discontinuous Galerkin framework[J]. *Communications in Computational Physics*, 2025, 27(5): 1309-1343.
- [13] Guermond J L, Pasquetti R. Entropy-based nonlinear viscosity for Fourier approximations of conservation laws[J]. *Comptes Rendus Mathématique*, 2008, 346(13/14): 801-806.
- [14] Hirt C W, Nichols B D. Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries[J]. *Journal of Computational Physics*, 1981, 39(1): 201-225.
- [15] Afkhami S, Zaleski S, Bussmann M. A mesh-dependent model for applying dynamic contact angles to VOF simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2009, 228(15): 5370-5389.
- [16] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1988, 79(1): 12-49.
- [17] Wang Yaguang, Kang Zhan. A velocity field level set method for shape and topology optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2018, 115(11): 1315-1336.
- [18] Fedkiw R P, Aslam T, Merriman B, et al. A non-oscillatory eulerian approach to interfaces in multimaterial flows (the ghost fluid method)[J]. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152(2): 457-492.
- [19] Zingan V, Guermond J L, Morel J, et al. Implementation of the entropy viscosity method with the discontinuous Galerkin method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2013, 253: 479-490.
- [20] Zhang Qiang, Shu Chiwang. Error estimates to smooth solutions of runge: kutta discontinuous Galerkin methods for scalar conservation laws[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2004, 42(2): 641-666.
- [21] Sod G A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws[J]. *Journal of Computational Physics*, 1978, 27(1): 1-31.
- [22] Lax P D, Liu Xudong. Solution of two-dimensional Riemann problems of gas dynamics by positive schemes[J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 1998, 19(2): 319-340.
- [23] Tang Shuijiang. Improvements of the fifth-order WENO-JS-type

- scheme with normalized smoothing factor for gas dynamic Euler equations[J]. [Applied Numerical Mathematics](#), 2023, 184: 301-324.
- [24] Mikula K, Ševčovič D. A level set method using the signed distance function[J]. *Computing and Visualization in Science*, 2004, 6(4): 211-223.
- [25] Naber J. A Runge-Kutta discontinuous-Galerkin level-set method for unsteady compressible two-fluid flow[D]. Delft, Netherlands: Delft University of Technology, 2005.
- [26] Haas J F, Sturtevant B. Interaction of weak shock waves with cylindrical and spherical gas inhomogeneities[J]. [Journal of Fluid Mechanics](#), 1987, 181: 41-76.
- [27] Quirk J J, Karni S. On the dynamics of a shock-bubble interaction [R]. Hampton, US: NASA Langley Research Center, 1994.
- [28] Wackers J, Koren B. Five-equation model for compressible two-fluid flow[R]. MAS-E0414, 2004.

(编辑: 秦理曼)