

基于拓扑优化的 S 弯管加筋布局设计方法

宋龙龙^{1,2}, 方平矗¹, 胡惠玉¹, 郭文杰³, 高 彤¹, 张少平⁴, 张卫红¹

(1. 西北工业大学 机电学院

航宇材料结构一体化设计与增材制造装备技术国际联合研究中心, 西安 710072;

2. 香港科技大学 智能建造研发中心, 香港 999077;

3. 中国飞机强度研究所 强度与结构完整性全国重点实验室, 西安 710065;

4. 中国航发四川燃气涡轮研究院, 成都 610500)

摘 要: 基于热弹性耦合多材料拓扑优化方法建立了 S 弯管加筋布局优化设计方法, 核心思路是引入虚拟材料概念并利用多材料尺寸控制技术, 实现任意曲面上自由筋与定向环筋布局的协同优化设计。在热弹性耦合多材料拓扑优化三场法框架内, 利用局部搜索建立单一材料环向变量链接模型, 实现规整的定向环筋形态; 进而构建了自由筋与定向环筋最大实体尺寸整体控制方法与定向环筋间距控制方法; 采用了非设计域蒙皮柔顺度最小作为优化目标, 满足内表面控形要求。采用所提方法完成了 S 弯管结构自由筋与定向环筋布局协同优化设计, 通过定向环筋间距控制获得了多种 S 弯管设计方案。重构结果表明: 在相同重量下, 相比于常规的规则加筋方案, 拓扑优化构型的设计方案的最大变形降低高达 17.1%。

关 键 词: S 弯管; 拓扑优化; 热弹性耦合; 多材料; 尺寸控制

中图分类号: V214.19

文献标志码: A

Stiffener layout design method for serpentine nozzles using topology optimization

SONG Longlong^{1,2}, FANG Pingchu¹, HU Huiyu¹, GUO Wenjie³, GAO Tong¹,
ZHANG Shaoping⁴, ZHANG Weihong¹

(1. State International Joint Research Center of Aerospace Design and Additive Manufacturing,
School of Mechanical Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China;

2. Hong Kong Center for Construction Robotics,

Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong 999077, China;

3. National Key Laboratory of Strength and Structural Integrity,

Aircraft Strength Research Institute of China, Xi'an 710065, China;

4. Sichuan Gas Turbine Establishment, Aero Engine Corporation of China, Chengdu 610500, China)

Abstract: A stiffener layout design method for serpentine nozzles based on thermo-elastic coupling multi-material topology optimization was presented. The virtual material concept was introduced, and multi-material length scale control was utilized to achieve the collaborative optimization design of free and directional ring stiffeners on arbitrary curved surfaces. Within the framework of the thermo-elastic coupling multi-material topology optimization three-field method, a circumferential variable linking model

收稿日期: 2025-07-25

基金项目: 基础科研计划(JCKY2022205B020); 国家自然科学基金(U2441208)

作者简介: 宋龙龙(1994—), 男, 博士, 主要从事考虑工艺约束的结构拓扑优化设计研究。E-mail: songdlong@ust.hk

通信作者: 高彤(1980—), 男, 教授, 博士, 主要从事结构拓扑优化设计理论与方法研究。E-mail: gaotong@nwpu.edu.cn

引用格式: 宋龙龙, 方平矗, 胡惠玉, 等. 基于拓扑优化的 S 弯管加筋布局设计方法[J]. 航空动力学报, 2022, X(X): 20250354. SONG Longlong, FANG Pingchu, HU Huiyu, et al. Stiffener layout design method for serpentine nozzles using topology optimization[J]. Journal of Aerospace Power, 2022, X(X): 20250354.

for a single material was established using local search to achieve a regular directional ring stiffener morphology. Furthermore, a global control method for the maximum solid length scale of both free and directional ring stiffeners, and a control method for the spacing of the directional ring stiffeners were constructed. The minimization of non-design domain skin compliance was employed as the optimization objective to meet the inner surface shape control requirements. The proposed method was used to complete the collaborative optimization design of free and directional ring stiffener layouts in serpentine nozzles. Various serpentine nozzle designs were obtained by controlling the ring stiffener spacing. The reconstructed designs from the optimized configurations achieved a maximum deformation reduction of up to 17.1% compared with conventional, regularly stiffened designs under the same structural mass.

Keywords: serpentine nozzles; topology optimization; thermo-elastic coupling; multiple materials; length scale control

S 弯管作为航空发动机气动布局优化的核心组件, 因其在抑制发动机红外信号特征方面的显著优势, 已成为现代先进飞行器推进系统的关键技术方案^[1-2]。相较于传统轴对称构型, 目前 S 弯管在结构上呈现大曲率弯曲特征与薄壁化设计倾向。随着飞行器轻量化设计需求的持续提升, 在气动载荷与温度载荷等复杂的耦合载荷作用下, S 弯管的多场耦合结构设计是当前航空推进系统研究的重点之一。

值得关注的是, 受 S 弯管大尺寸特征的限制, 工程上通常采用多段拼接工艺进行加工制造。为提升拼接截面的局部承载能力, 需在拼接位置布置垂直于轴线的定向环筋结构, 这便使得结构中存在自由筋与定向环筋。然而, 现有拼接截面位置的选择仍主要依赖工程经验, 缺乏系统的理论支撑和结构优化设计方法进行自由筋与定向环筋之间的合理布局, 导致 S 弯管结构设计存在冗余或安全隐患。

拓扑优化技术能够为工程结构提供创新的加筋布局方案。其中变密度法凭借其数学表述的简洁性及其在实现编程时的便捷性, 成了广泛采纳的方法, 被广泛应用于航空航天^[3]等工程领域。例如飞机吊架的拓扑优化设计^[4-5], 其中 Remouchamps 等^[4]针对某空客飞机吊架的空气动力学性能(阻力)以及结构性能(刚度、质量)提出了一种创新的双级优化方案。Krog 等^[6]利用变密度拓扑优化方法对空客 A380 的机翼前沿肋条及机身舱门加固框架进行优化设计, 最终实现整架飞机质量减轻 1 000 kg 效果。此外, 柴文伟等^[7]针对航空发动机典型壳体薄壁结构件开展了基于拓扑优化技术的轻量化方法研究。多材料拓扑优化因增加了不同材料选择的自由度从而增加结构的优化空

间, 在点阵加筋混杂结构布局优化设计^[8-11]中得到了广泛应用。Li 等^[8]首先针对需要加强筋与点阵共存的薄壁结构, 提出了将加强筋与点阵单胞处理为独立备选材料的多材料布局优化方法。近期该方法被应用于梯度点阵与加强筋^[9]、热弹性耦合舵面^[10]以及复材夹芯板^[11]的混杂结构布局优化设计。

国内外研究人员对 S 弯管的研究主要集中在流动机理和气动特性等方面, 拓扑优化设计相关研究较少。薛丁维等^[12]针对 S 弯管腹板式传力结构的布局和尺寸开展了多目标优化设计方法的探讨, 但该工作基于预制的腹板式结构布局, 主要偏向于尺寸优化。Huang 等^[13]对 S 弯管进行了拓扑与形状协同优化, 但仍以自由筋为主, 未涉及定向环筋与间距控制等技术。

实现 S 弯管在热弹性耦合载荷下自由筋与定向环筋共存的拓扑优化设计目前仍具有挑战性。一方面, 受设计相关的热应力载荷影响, 在传统的整体结构变形最小的优化问题定义下^[14], 优化结果中倾向于无材料分布, 因此如何在控制弯管特定区域变形的前提下, 得到清晰的薄壁加筋结构形式的优化布局是难点之一。不少学者针对热应力载荷设计相关性带来的挑战进行了大量研究。Cho 和 Choi^[15]基于密度法拓扑优化框架, 提出了一种用于热-弹性耦合问题的统一高效的伴随灵敏度分析方法, 降低了计算成本并揭示了力热载荷比例的变化对拓扑结构影响。Gao 和 Zhang^[16]提出了将材料弹性模量与热膨胀系数的乘积定义为热应力系数, 揭示了热应力载荷对设计变量的显式依赖关系。该系数指标后来被成功应用于热弹性结构的应力优化设计^[17]及多尺度协同拓扑优化^[18]领域。但以上方法在较高的温度场下仍

难以得到清晰的优化布局。近年来,热弹性拓扑优化技术在工程应用层面取得突破,已为若干典型航空结构提供了创新设计解决方案^[19-23]。其中 Song 等^[23]针对高温高压下的舵面结构,提出了以非设计域蒙皮柔顺度最小代替传统的整体结构柔顺度最小为优化目标,实现了舵面结构的热弹性耦合优化设计。该工作中的舵面结构与 S 弯管的载荷边界以及变形控制要求存在较大的共性,具有较高的借鉴价值。

如何满足 S 弯管的制造工艺要求,实现自由筋与定向环筋共存的结构优化布局是另一难点。考虑制造工艺约束的拓扑优化是近年来的研究热点^[24-26],其中最大尺寸控制为最常见工艺约束之一,也是实现薄壁加筋设计的关键技术。基于密度法的拓扑优化框架下, Guest^[27]首先建立了一种基于设计域搜索的局部约束以防止大于规定最大尺寸的特征形成,数值算例表明了该方法的有效性,但大量的局部约束提高了该方法的计算成本。为了提高计算效率, Fernández 等^[28]采用了有效的凝聚函数以减少局部约束的数量。但以上尺寸控制方法仅适用于单一筋的特征尺寸控制,难以实现定向环筋布局以及多类筋共存的优化构型。为此, Song 等^[29-31]提出了以矩形和圆柱局部搜索代替传统的圆形和球形,实现了二维和三维优化问题中的定向最大尺寸控制;结合了多材料插值模型,实现了多材料拓扑优化中多种材料最大尺寸的整体控制与差异控制,并将方法成功应用于大展弦比机翼的结构优化设计中,实现了机翼主梁-翼肋结构形式的优化布局。该系列工作证实了在多材料拓扑优化框架下、结合尺寸控制技术实现多类筋共存的优化布局可行性。

为了得到高性能的自由筋与定向环筋共存的 S 弯管布局优化设计,本文提出基于多材料拓扑优化的热弹性耦合加筋布局设计方法,后续章节内容安排如下:首先介绍了 S 弯管模型与设计要求。其次分别介绍了热弹性多材料三场密度法与基于尺寸约束的加筋控制。随后建立了加筋布局拓扑优化模型并进行灵敏度分析,进行了 S 弯管加筋布局设计。最后对全文研究内容进行总结,并基于本文的研究展望未来的工作。

1 S 弯管简介与总体思路

传统 S 弯管结构的加筋布局通常基于工程经验,采用由定向环筋与轴向筋组成的规则分布形

式,如图 1 所示。本文通过提取 S 弯管的最恶劣工况并进行合理简化,确定了如下载荷与边界条件作为计算输入:内腔承受 0.23 MPa 的均布压强载荷,同时结构整体处于 500 K 的均匀温度场环境中,结构的进气口端面受固定约束,如图 2 所示。结构材料均采用 GH4169 高温合金。

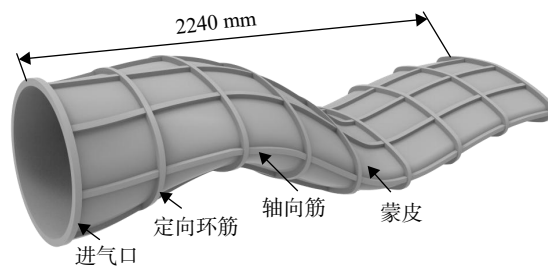


图 1 S 弯管常规加筋布局设计方案

Fig. 1 Conventional stiffener layout design for serpentine nozzle

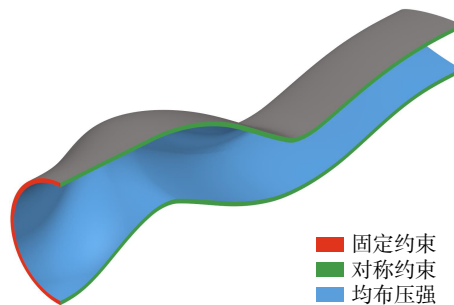


图 2 约束边界与载荷

Fig. 2 Boundary conditions and loads

基于上述分析可知, S 弯管的设计需满足以下两方面的核心要求:①性能要求。在热-力耦合工况下,需控制结构内表面变形以保持气动型面。②工艺要求。加筋布局需采用自由筋与定向环筋协同分布的构型,且筋的尺寸兼顾制造可行性。

针对以上设计要求,本文利用多材料拓扑优化技术,开展基于自由筋与定向环筋共存的 S 弯管加筋布局优化设计研究,文章整体思路如图 3 所示。为了满足 S 弯管的性能要求,提取非设计域蒙皮柔顺度并将其最小化作为优化目标以实现结构内表面控形。针对 S 弯管的工艺要求,将单材料三场法扩展至热弹性耦合的多材料优化框架,基于此建立单一材料的单层环向变量链接表与定向最大孔洞尺寸控制方法,实现定向环筋的布局形态及定向环筋之间的间距控制;建立多材料最大实体尺寸整体控制方法以控制自由筋与定向环筋的整体尺寸。随后对 S 弯管进行不同参数下的优化,分析优化参数对优化构型的影响规律,最终根据优化构型进行重构设计并与常规设计方案

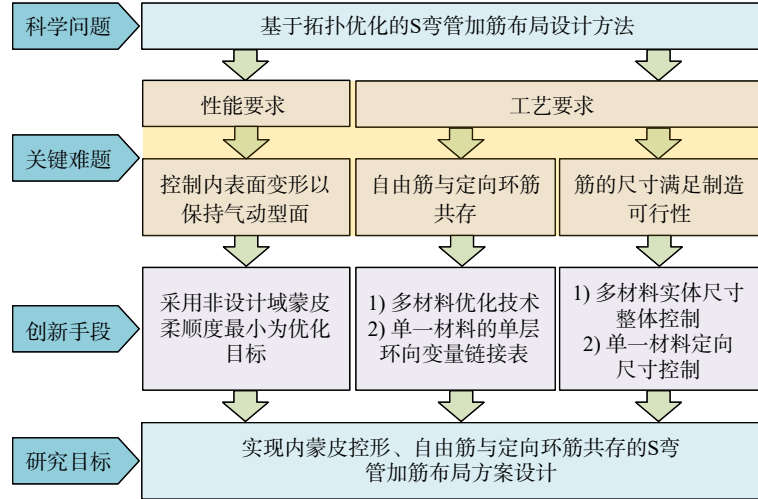


图3 整体思路

Fig. 3 Methodology of the paper

进行比较。

2 热弹性多材料三场密度法

2.1 热弹性耦合有限元分析

S弯管作为同时承受气动压力与温度场作用的热弹性耦合问题,其有限元分析所需求解的控制方程可表述为

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}^m + \mathbf{F}^h \quad (1)$$

其中 $\mathbf{K}$ 为整体结构刚度矩阵, $\mathbf{u}$ 为节点位移向量, $\mathbf{F}^m$ 代表由机械载荷引起的节点载荷向量, $\mathbf{F}^h$ 代表由温度场引起的热应力载荷向量。

在有限元分析层面,单元 i 的刚度矩阵及热应力载荷向量可表述为

$$\begin{cases} \mathbf{K}_i = \int_{V_i} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i dV \\ \mathbf{F}_i^h = \beta_i \bar{\mathbf{F}}_i^h, \text{其中 } \bar{\mathbf{F}}_i^h = \int_{V_i} \mathbf{B}_i^T \bar{\mathbf{D}}_i \phi \Delta T_i dV \end{cases} \quad (2)$$

此处 V_i 与 $\mathbf{B}_i$ 分别为单元 i 的体积与形函数导数构成的单元应变-位移矩阵。 ΔT_i 表示为单元的温度增量,对于三维问题有 $\phi = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $\mathbf{D}_i$ 为基于弹性模量 E 和泊松比 μ 建立的弹性矩阵。 $\bar{\mathbf{D}}_i$ 与 $\bar{\mathbf{F}}_i^h$ 分别为单位弹性模量下的弹性矩阵与热应力载荷矩阵。热应力系数 β_i 作为材料属性参数^[16],其定义为弹性模量 E_i 、热膨胀系数 α_i 及泊松比 μ_i 的函数表达式。

$$\beta_i = \frac{E_i \alpha_i}{1 - 2\mu_i} \quad (3)$$

2.2 基于多材料插值的三场法

为了消除优化中的棋盘格现象与网格依赖性,

并且最终得到清晰的优化构型,本文将单材料三场密度法扩展至多材料优化框架。因此基于密度法的多材料拓扑优化中,其中的三场通常是指设计变量场 $\mathbf{x}$ 、过滤变量场 $\tilde{\mathbf{x}}$,以及物理变量场 $\bar{\mathbf{x}}$,3个变量场在多材料拓扑优化中的关系描述如下。

设计变量场由各参与优化的备选材料相关设计变量的列向量组成,本文采用两种备选材料分别代表S弯管结构中的定向环筋与自由筋,并指定材料1、材料2分别代表定向环筋与自由筋。因此材料 j 相关的设计变量场定义为

$$\mathbf{x}^{(j)} = [x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nj}]^T \quad (4)$$

其中 n 和 j 分别表示参与设计的单元数目与备选材料编号, x_{ij} 为单元 i 与材料 j 相关的设计变量。对材料 j 相关的设计变量场 $\mathbf{x}^{(j)}$ 采用密度过滤^[32]得到过滤变量场 $\tilde{\mathbf{x}}^{(j)}$,两者的关系表达式定义为

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(j)} = \mathbf{W} \mathbf{x}^{(j)} \quad (5)$$

式中 $\mathbf{W}$ 为过滤矩阵,其中第 ik 项为第 k 单元对第 i 单元的过滤权重系数,表达式定义为

$$W_{ik} = \frac{w_{ik} V_k}{\sum_{\xi=1}^n w_{i\xi} V_{\xi}} \quad (6)$$

其中 V_k 为第 k 单元的体积。 w_{ik} 为第 k 单元对第 i 单元的距离权重函数,权重函数表达式定义为

$$w_{ik} = \max \{R_f - d_{ik}, 0\} \quad (7)$$

式中 R_f 为预置的过滤半径,如图4(a)所示,在进行密度过滤时,单元 i 将进行以自己为中心, R_f 为半径的局部搜索,即单元 i 的过滤变量值为所有

搜索区域内的单元设计变量值的函数。 d_{ik} 为第 k 单元与第 i 单元的中心距离, 式(7)的效果如图 4 (b)所示, 即在局部搜索区域内, 权重值与距离中心单元的距离成反比。

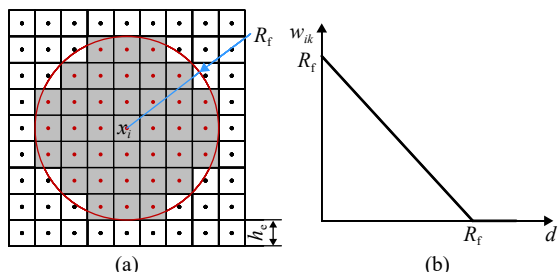


图 4 密度过滤局部搜索与距离权重

Fig. 4 Local search for the density filter and the distance weight

密度过滤虽然可有效地消除优化构型中的棋盘格现象与网格依赖性, 但同时给优化构型中的实体与孔洞交界处带来灰度区域导致边界模糊。为了得到清晰的优化构型, 本文对过滤变量 $\tilde{x}_{ij}$ 使用光滑的 Heaviside 函数从而获得物理变量 $\bar{x}_{ij}$ ^[33], 如图 5 所示, 其表达式为

$$\bar{x}_{ij} = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh[\beta(\tilde{x}_{ij} - \eta)]}{\tanh(\beta\eta) + \tanh[\beta(1 - \eta)]} \quad (8)$$

式中参数 β 和 η 分别控制投影的陡度与阈值。该表达式具有阶跃函数的性质, 即将过滤变量场中的值小于 η 的变量往 0 方向投影, 大于 η 的变量往 1 方向投影, 从而得到 0/1 分布的物理变量场, 效果如图 5 所示。

基于 DMO(Discrete Material Optimization) 的 UMMI(Uniform Multiphase Materials Interpolation) 插值模型^[34]的多材料拓扑优化是一种有效可靠的结构多材料布局优化方法, 另外在其框架下提

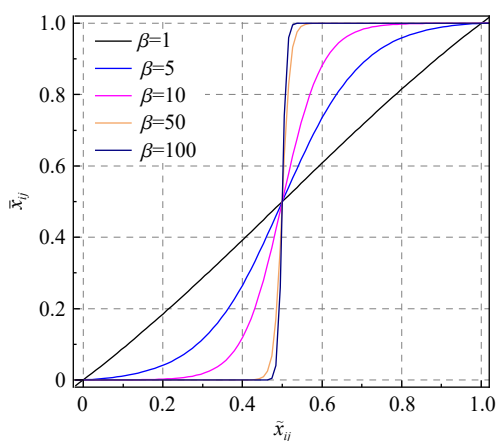


图 5 光滑 Heaviside 函数

Fig. 5 Smooth Heaviside function

出的尺寸控制可实现不同材料特征尺寸的差异控制。因此本文沿用 UMMI 插值模型建立设计变量场与备选材料之间的关系, 在具有参与优化的备选材料数量为 m 的拓扑优化中, 其中单元 i 的弹性模量可表达为各备选材料权重和的形式, 其定义为

$$E_i = \lambda_{i1}(E^{(1)} - E_{\min}) + \lambda_{i2}(E^{(2)} - E_{\min}) + E_{\min} \quad (9)$$

其中 λ_{ij} 为物理变量 $\bar{x}_{ij}$ 的权重函数, $E^{(j)}$ 为材料 j 的弹性模量。 $E_{\min}$ 表示为预置的小值以避免插值后的弹性模量为 0 而导致刚度矩阵奇异, 本文中取值为 $E_{\min} = 10^{-9}E^{(1)}$ 。采用 SIMP(Solid Isotropic Material with Penalization) 惩罚模型, 因此权重函数 λ_{ij} 的表达式为

$$\lambda_{ij} = \bar{x}_{ij}^p \prod_{\substack{\xi=1 \\ \xi \neq j}}^2 (1 - \bar{x}_{i\xi}^p) \quad (10)$$

式中 p 为 SIMP 模型的惩罚因子。在该权重函数的作用下, 即第 i 单元的设计变量值与材料分布满足以下关系: 当 $\bar{x}_{i1} = 0$ 、 $\bar{x}_{i2} = 0$ 和 $\bar{x}_{i1} = 1$ 、 $\bar{x}_{i2} = 1$ 时权重函数 λ_{i1} 、 λ_{i2} 值均为 0, 则单元 i 表示为孔洞; 当 $\bar{x}_{i1} = 1$ 、 $\bar{x}_{i2} = 0$ 时权重函数 $\lambda_{i1} = 1$ 、 $\lambda_{i2} = 0$, 则单元 i 表示为定向环筋; 当 $\bar{x}_{i1} = 0$ 、 $\bar{x}_{i2} = 1$ 时权重函数 $\lambda_{i1} = 0$ 、 $\lambda_{i2} = 1$, 则单元 i 表示为自由筋。图 6 给出了插值后的弹性模量 E_i 与物理变量的映射关系。

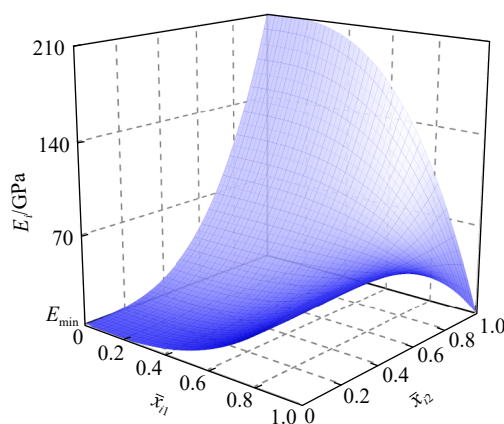


图 6 弹性模量插值模型 ($E^{(1)}=70$ GPa; $E^{(2)}=210$ GPa; $p=3$)

Fig. 6 Young's modulus interpolation model ($E^{(1)}=70$ GPa; $E^{(2)}=210$ GPa; $p=3$)

3 基于尺寸约束的加筋控制

最大尺寸控制约束是结合多材料 UMMI 插值模型中每单一材料的有无可由该材料的相关变量独立控制的特点, 可分别在局部搜索区域内构

造多材料孔隙率与单一材料率,随后通过引入相关允许上限构造约束函数,以实现多材料拓扑优化中的多材料最大实体尺寸整体控制与单一材料定向最大孔洞尺寸控制^[29,31]。

多材料拓扑优化增加了材料选择的自由度,在传统的多材料拓扑优化中不同备选材料之间的材料属性通常不同。而本文通过借用多材料拓扑优化方法、人为引入并利用两种属性相同的虚拟材料,结合尺寸控制技术,实现自由曲筋和定向环筋空间布局协同优化。因此,本文两种虚拟材料的属性是一样的,都等同于选定的实际材料。

为了实现自由筋与定向环筋整体尺寸的控制,通过在局部球形搜索区域内引入自由筋与定向环筋的整体材料孔隙率,实现最大实体尺寸不超过预设阈值。建立单一材料的环向变量链接模型实现规整的定向环筋加筋形态,同时在局部棱柱搜索区域内引入定向环筋的材料率以实现定向环筋之间的间距控制。

3.1 自由筋与定向环筋实体尺寸整体控制

在第 i 单元的局部搜索区域内 D_i 引入自由筋与定向环筋的整体孔隙率,其定义为

$$\zeta_i = \frac{\sum_{k \in D_i} v_k \prod_{j=1}^2 (1 - \bar{x}_{kj})^p}{\sum_{k \in D_i} v_k} \quad (11)$$

整体孔隙率的定义结合了 UMMI 插值模型的定义,当且仅当 $x_{i1} = x_{i2} = 0$ 时单元 i 的孔隙率 ζ_i 才为 1,即此时单元 i 正好为孔洞,且 ζ_i 也代表为所有材料的整体孔隙。同样,引入整体孔隙率下限 $\bar{\zeta}$ 以保证每个局部搜索区域均存在孔洞,因此整体的最大实体尺寸局部控制约束表达式为

$$\varphi_{\max,i} = \bar{\zeta} - \zeta_i \leq 0 \quad (12)$$

由于式(12)针对单元 i 的最大实体尺寸约束,若控制整个优化构型中的尺寸,需要对整个设计域中的每个单元进行约束,这将造成十分庞大的计算成本。为了降低计算成本,本文采用 p-mean 凝聚函数,对所有的局部约束凝聚成全局的单一约束从而减少了最大尺寸控制约束的数量。根据式(12)与凝聚函数的定义,构造函数 $s_i \in [0, 1]$,其表达式定义为

$$s_i = \varphi_{\max,i} + 1 - \bar{\zeta} \quad (13)$$

由于整个设计域内每个单元均对应一个函数值 s ,采用凝聚函数对所有的函数值 s 求其最大值的近似值,其表达式为

$$p_m = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (s_i^{(0)})^{p_n} \right)^{1/p_n} \quad (14)$$

式中 p_n 为凝聚函数的凝聚因子, n 为整个设计域内的单元数,根据凝聚函数的定义, p_n 取值越大凝聚函数的值越接近实际最大值,但同时给优化带来较大的非线性。

根据式(13)与式(14),整体材料的最大实体尺寸控制约束的最终表达式为

$$G_{\max} = p_m - 1 + \bar{\zeta} \leq 0 \quad (15)$$

根据整体孔隙率的定义,图 7(a)中整体孔隙率为 0,图 7(b)中整体孔隙率分别为 8.11%。

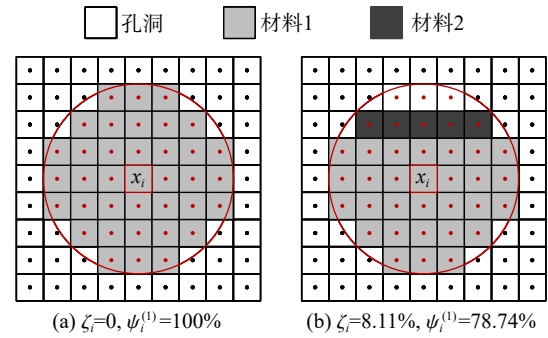


图 7 多种情况下单元 i 的孔隙率与材料率

Fig. 7 Porosities and material rates under different conditions

3.2 定向环筋间距控制

为了实现材料 1 呈定向环筋形态,建立针对材料 1 的环向变量链接模型,由于该模型涉及各优化响应灵敏度的运算,故将此部分内容放置文中第 4 节拓扑优化模型中。

定向环筋的间距控制通过在第 i 单元的局部棱柱搜索区域内引入针对定向环筋(材料 1)的材料率来实现,其定义为

$$\psi_i^{(1)} = \frac{\sum_{k \in D_i} v_k \bar{x}_{k1}^p}{\sum_{k \in D_i} v_k} \quad (16)$$

式(16)表明,只有在以单元 i 为中心的搜索区域内材料 1 相关的变量均为 0 时,材料 1 的材料率才为 0。同样引入材料率下限 $\bar{\psi}$,材料 1 的最大孔洞尺寸控制约束表达式为

$$\varphi_{\max v, i}^{(1)} = \bar{\psi} - \psi_i^{(1)} \leq 0 \quad (17)$$

根据单一材料率的定义, 图 7(a) 中材料 1 的材料率 $\psi_i^{(1)}$ 为 100%, 图 7(b) 中材料 1 的材料率为 78.74%。后面对所有局部约束的凝聚方式与多材料最大实体尺寸整体控制约束中保持一致。

在自由筋与定向环筋的最大实体尺寸整体控制与定向环筋间距控制中分别采用局部球形搜索与棱柱搜索, 如图 8 所示。其中棱柱搜索的控制表达式为

$$d_{ik}^x < \bar{d}_{ik}^x \quad d_{ik}^y < \bar{d}_{ik}^y \quad d_{ik}^z < \bar{d}_{ik}^z \quad (18)$$

式中 $\bar{d}_{ik}^x$ 、 $\bar{d}_{ik}^y$ 与 $\bar{d}_{ik}^z$ 分别为单元 i 与 k 在 3 个方向的距离上限, 其中 $\bar{d}_{ik}^x$ 控制定向环筋之间的距离。

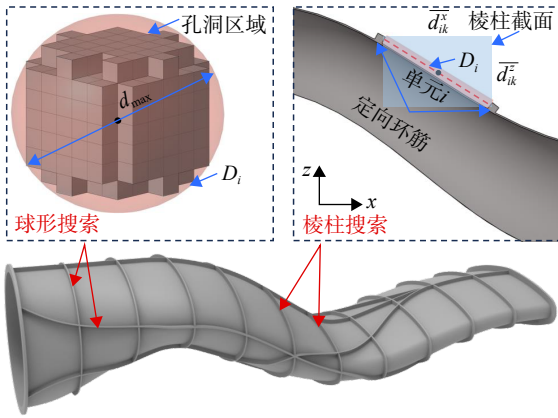


图 8 不同尺寸控制方法的局部搜索形状

Fig. 8 Local search shapes for different length scale control methods

4 加筋布局拓扑优化模型与灵敏度分析

针对 S 弯管内表面的变形控制要求, 本文采用非设计域蒙皮柔顺度最小作为优化目标。值得注意的是, 在热弹性结构柔顺度最小的拓扑优化问题中, 由于温度属于设计相关载荷, 在优化模型的定义下, 优化结果是倾向于无材料分布, 即无材料便不存在变形, 因此很难得到清晰的优化结构。然而, 采用非设计域的柔顺度可降低温度带来的设计相关性^[23]。同时, 采用结构整体质量约束与单一材料的体积分数比分别限制整体材料与单一材料的使用。

因此, 考虑结构整体质量、单一材料体积分数比和尺寸控制约束的结构柔顺度最小的多材料拓扑优化问题可表述为

优化变量: $\mathbf{x} = \{x_{ij}\} \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, 2)$

优化目标: $C_{D_s} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{D_s} \mathbf{u}$

优化约束: $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}^m + \mathbf{F}^{th}$

$$\bar{\mathbf{x}}^{(j)} = H(\bar{\mathbf{x}}^{(j)}) = H(\mathbf{W} \mathbf{x}^{(j)}) \quad (19)$$

$$M(\bar{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 \bar{x}_{ij} \rho^{(j)} V_i \leq \bar{M}$$

$$V_f^{(1)}(\bar{\mathbf{x}}) \leq f_u^{(1)} \cdot V$$

$$G_{\max} \leq 0$$

$$G_{\max v}^1 \leq \varepsilon$$

式中 C_{D_s} 为弯管蒙皮柔顺度, H 代表 Heaviside 函数。 $\rho^{(j)}$ 和 V_i 分别为材料 j 的密度与单元 i 的体积, $V_f^{(1)}$ 为优化中定向环筋的体积分数比且应不超过其上限 $f_u^{(1)}$, V 为结构的整体体积。 M 为结构的整体质量约束, 且不大于上限 $\bar{M}$ 。 $G_{\max}$ 和 $G_{\max v}^1$ 分别表示为加强筋的整体最大实体尺寸控制和定向环筋的最大间距控制约束, 其中 ε 为引入的定向最大间距控制约束上限。

此外, 为了实现完整规则的定向环筋, 本文通过局部搜索建立了材料 1 的单层环向变量链接表, 规定在链接表内各定向环筋的材料变量灵敏度相等, 其值为环向变量链接表内所有灵敏度的总和, 表达式为

$$\frac{\partial f_l}{\partial x_{i1}} = \sum_{k \in \bar{D}_i} \frac{\partial f_l}{\partial x_{k1}} \quad (20)$$

式中 f_l 为优化模型中的第 l 个响应, $\bar{D}_i$ 为变量 i 所在的变量链接表。

本文由于采用基于梯度的优化算法, 因此有必要对设计变量进行灵敏度分析。本节详细推导了结构非设计域蒙皮柔顺度以及最大成员尺寸控制约束的灵敏度分析。

由于优化过程中具有 3 个变量场, 对于一般的单值函数 f , 通常先求其对物理变量场的灵敏度 $\partial f / \partial \bar{\mathbf{x}}$, 随后采用链式法则计算其对设计变量场 $\mathbf{x}$ 的灵敏度, 即

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{W} \quad (21)$$

式中 $\partial \bar{\mathbf{x}} / \partial \mathbf{x}$ 根据密度过滤的定义 (见式 (5)) 可求得为过滤矩阵 $\mathbf{W}$, $\partial \bar{\mathbf{x}} / \partial \mathbf{x}$ 根据式 (8) 直接推导可求得

$$\frac{\partial \bar{x}_{ij}}{\partial x_{ij}} = \frac{\beta \{1 - \tanh^2 [\beta (\bar{x}_{ij} - \eta)]\}}{\tanh(\beta \eta) + \tanh[\beta (1 - \eta)]} \quad (22)$$

在计算每个优化响应的灵敏度时链式法则求导方式均一致, 因此不同优化响应的灵敏度分析

不同之处主要在于 $\partial f / \partial \bar{x}$ 的计算。

4.1 非设计域柔顺度

根据式(19)的定义, 结构非设计域蒙皮柔顺度关于物理变量的 $\bar{x}$ 灵敏度为

$$\frac{\partial C_{D_s}}{\partial \bar{x}_{ij}} = \frac{1}{2} \delta_i \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \bar{x}_{ij}} \mathbf{u}_i + \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{D_s} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{x}_{ij}} \quad (23)$$

式中

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & i \in D_s \\ 0 & i \notin D_s \end{cases} \quad (24)$$

根据热弹性平衡方程的微分, 对节点位移向量的偏导数进行直接推导。此外, 此工作采用伴随法求整体结构刚度矩阵的逆, 最终结构非设计域蒙皮柔顺度关于物理变量的灵敏度可表达为

$$\frac{\partial C_{D_s}}{\partial \bar{x}_{ij}} = \frac{1}{2} \delta_i \mathbf{u}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \bar{x}_{ij}} \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\kappa}^T \left(\frac{\partial \mathbf{F}_i^{\text{th}}}{\partial \bar{x}_{ij}} - \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \bar{x}_{ij}} \mathbf{u}_i \right) \quad (25)$$

其中 $\boldsymbol{\kappa}$ 为求解得到的伴随向量。根据链式法则, 单元刚度矩阵与热应力载荷向量关于物理变量的导数可表达为多材料插值模型的导数与单位模量下的单元刚度矩阵 $\bar{\mathbf{K}}_i$ 、热应力载荷向量 $\bar{\mathbf{F}}_i^{\text{th}}$ 的函数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \bar{x}_{ij}} &= \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial \bar{x}_{ij}} E^{(k)} \right) \bar{\mathbf{K}}_i \\ \frac{\partial \mathbf{F}_i^{\text{th}}}{\partial \bar{x}_{ij}} &= \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial \lambda_{ik}}{\partial \bar{x}_{ij}} \beta^{(k)} \right) \bar{\mathbf{F}}_i^{\text{th}} \end{aligned} \quad (26)$$

式中多材料插值模型关于物理变量的导数可根据定义直接推导, 关于此部分的详细推导, 感兴趣的读者可参考文献 [23, 29]。

4.2 尺寸控制

此处对自由筋与定向环筋最大实体尺寸整体控制约束的灵敏度进行推导, 根据该约束的定义, 其中整体材料最大实体尺寸控制约束关于的物理变量 $\bar{x}_{ij}$ 的表达式为

$$\frac{\partial G_{\text{maxs}}}{\partial \bar{x}_{ij}} = \frac{\partial G_{\text{maxs}}}{\partial p_m} \sum_{k \in D_i} \left(\frac{\partial p_m}{\partial s_k} \cdot \frac{\partial s_k}{\partial \varphi_{\text{maxs},k}} \cdot \frac{\partial \varphi_{\text{maxs},k}}{\partial \bar{x}_{ij}} \right) \quad (27)$$

根据最大实体尺寸独立控制约束的定义, 可得 $\partial G_{\text{maxs}} / \partial p_m = 1$ 和 $\partial s_k / \partial \varphi_{\text{maxs},k} = 1$, 因此代入上式 $\partial p_m / \partial s_k$ 又可表达为

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_m}{\partial s_k} &= \frac{1}{p_n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (s_j)^{p_n} \right)^{\left(\frac{1}{p_n} - 1 \right)} \cdot \frac{1}{n} p_n (s_k)^{p_n - 1} = \\ \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (s_j)^{p_n} \right)^{\left(\frac{1}{p_n} - 1 \right)} (s_k)^{p_n - 1} &= \frac{1}{n} p_m^{1 - p_n} (s_k)^{p_n - 1} \end{aligned} \quad (28)$$

此外, $\partial \varphi_{\text{maxs},k} / \partial \bar{x}_{ij}$ 根据单一材料孔隙率的定义可计算为

$$\frac{\partial \varphi_{\text{maxs},k}}{\partial \bar{x}_{ij}} = - \frac{v_i p (1 - \bar{x}_{ij})^{p-1} \prod_{l=1, l \neq j}^2 (1 - \bar{x}_{il})^p}{\sum_{k \in D_i} v_k} \quad (29)$$

将式(28)、式(29)代入式(27)中, 可得多材料最大实体尺寸整体控制约束关于物理变量 $\bar{x}_{ij}$ 的灵敏度计算为

$$\frac{\partial G_{\text{maxs}}}{\partial \bar{x}_{ij}} = \sum_{k \in D_i} \left[\frac{p_m^{1-p_n} (s_k)^{p_n-1} \left(\partial \varphi_{\text{maxs},k} / \partial \bar{x}_{ij} \right)}{n \sum_{k \in D_i} v_k} \right] \quad (30)$$

5 S 弯管加筋布局设计

5.1 拓扑优化设计

S 弯管的有限元模型如图 9 所示, 结构的前段进气口处的定向环筋与内蒙皮均需保留。将 S 弯管表面进行填充设计域处理, 根据结构的对称性, 使用半模进行优化以减少计算规模。采用实体单元和厚度为 1 mm 的壳单元分别模拟加筋区域与内蒙皮, 整体有限元网格数量为 114 393。

在局部棱柱搜索区域内, 棱柱的截面积越大导致局部搜索区域内的单元层数越多, 此时会影响定向环筋之间的距离控制^[30]。在结构的 x 方向, 设置距离为 1 倍的单元尺寸, 通过局部搜索建立若干个环向变量链接表, 如图 9 所示。根据有限元模型中的单元尺寸, 本文中 $\bar{d}_{ik}^y = 5 \text{ mm}$ 与 $\bar{d}_{ik}^z = 50 \text{ mm}$ 以保证搜索区域在 y 方向为一层单元, 在 z 方向包含厚度方向的所有单元。通过改变 x 方向

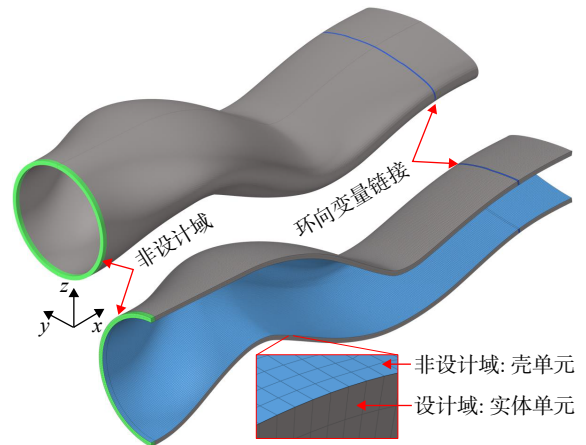


图 9 S 弯管有限元信息

Fig. 9 Finite element model of the serpentine nozzle

的搜索长度上限 $\overline{d}_{ik}^x$ 以实现具有不同间距的定向环筋。最大实体尺寸整体控制的搜索尺寸的半径设为 30 mm。

结构整体质量约束上限设为 80 kg, 定向环筋材料体积分数比上限为 0.1。由于在优化初始阶段设计变量的初始值较小而导致每个单元局部材料率较低, 因此最大孔洞尺寸控制约束在优化初始阶段容易因违反约束上限而陷入局部解。为了使迭代优化解在可行域内, 对最大孔洞尺寸控制约束的上限进行渐进式改变。在此工作中, ε 每隔 10 步乘以 0.1 直至从初始值 0.1 降至 0.001, 随后在第 40 步后将 ε 设为 0。

图 10 给出了在不同搜索长度上限与是否考虑变量链接情况下的优化结果, 结果中所有优化构型中的传力路径均较为清晰, 筋的最大尺寸得到了有效的控制。图 10(a) 为未考虑变量链接的优化构型, 该构型中虽然出现了大致的环状筋, 但形状不够规整, 且在距离控制下容易错开, 很难出现完整的定向环筋。如图 10(b)~图 10(d) 所示, 引入变量链接控制的优化构型中出现了规则完整的定向环筋, 自由筋穿插在定向环筋之间。

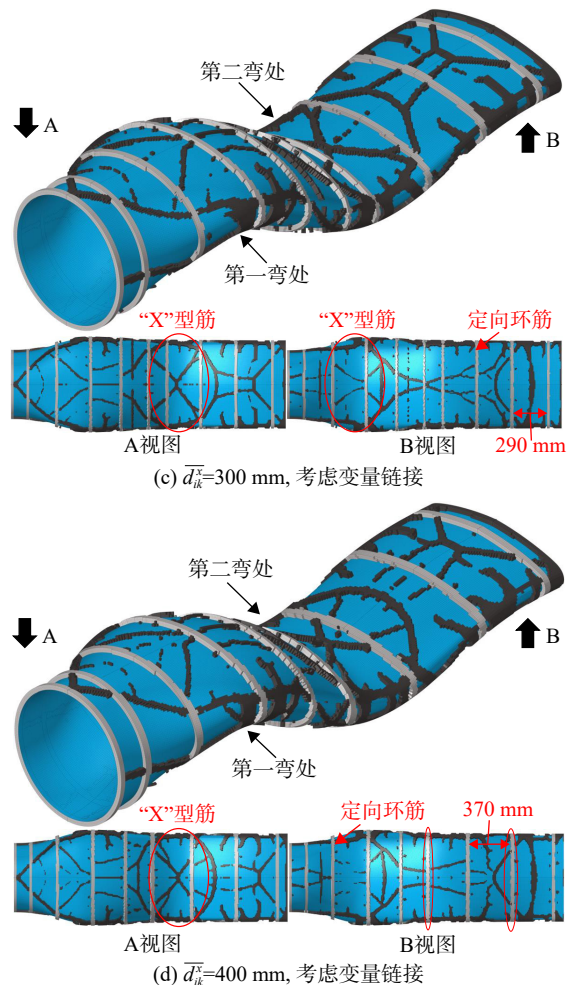
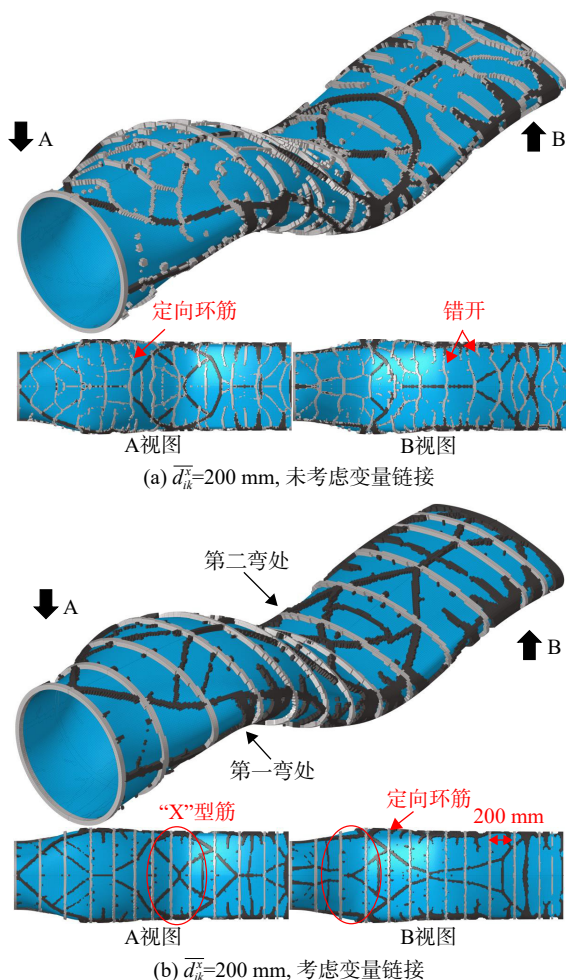


图 10 在 x 方向不同搜索长度上限 $\overline{d}_{ik}^x$ 下的优化构型

Fig. 10 Optimized configurations under different values of $\overline{d}_{ik}^x$

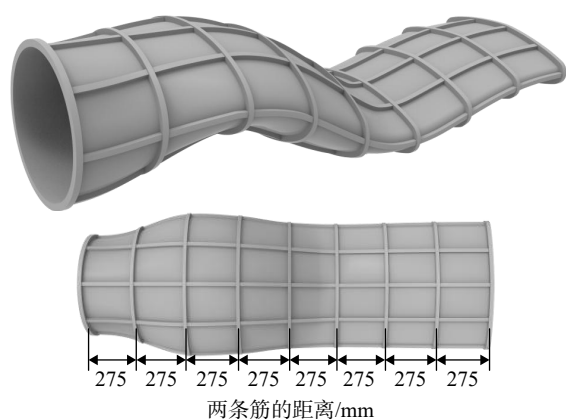
此外, 以图 10(b) 为例, 使用处理器为 i9-12922KS、内存为 64 GB 的台式机为计算平台, 整个优化迭代了 210 步, 耗时 7 h 50 min。

由于 S 弯管曲率较大的地方发生在轴向第一、二弯处与结构两侧处, 尤其在温度载荷下变形不自由造成这些地方的应力水平相对较高, 成为应变能密度较高的区域。在应变能最小(与结构柔顺度最小等效)的优化目标下使得优化构型中的材料分布集中在应变能密度较高的区域。因此, 定向环筋呈非均匀分布并且间距和数量均随着搜索长度上限的值变化而发生改变。并且在间距较大的定向环筋中间, 自由筋同时会根据结构性能要求而出现类似定向环筋的布局, 例如图 10(c)~图 10(d) 的喷口区域。在 S 弯管两端处的定向环筋间距较大, 接近给定的搜索长度上限, 而定向环筋在结构中间位置间距较小。当搜索长度上限变大时, 定向环筋的厚度在结构空间上变化同样较为明显, 例如图 10(d) 中圈出的两条定向环筋。

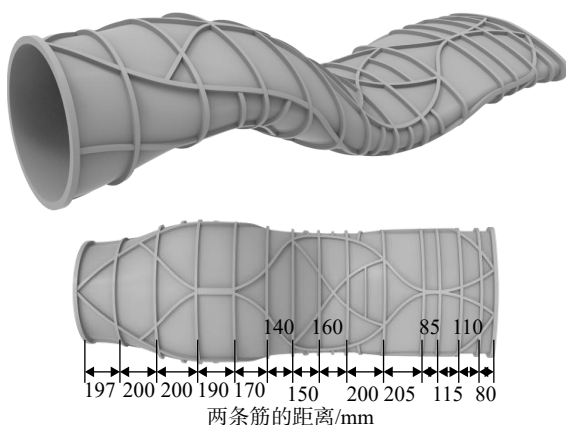
施加考虑变量链接的定向尺寸控制之后,优化构型中的自由筋构成了主要的传力路径,在曲率较大的弯管两侧分布材料比较集中,另外在第一、二弯处出现了明显的“X”形筋,如图 10 中圈出的特征所示,高效地传递到弯管约束端。

5.2 重构与刚度校核

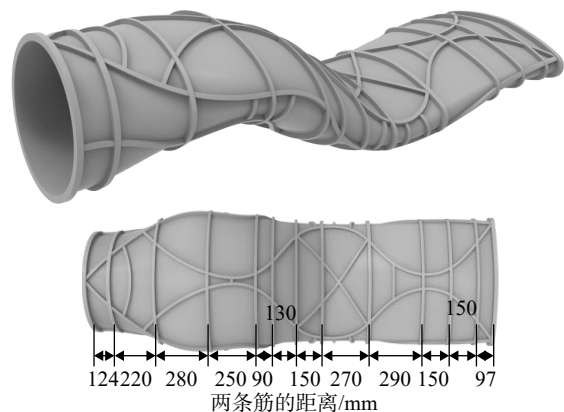
结合不同搜索长度上限 $\overline{d}_{ik}^s$ 下的优化构型进行重构设计,并对重构设计方案进行有限元校核,如图 11 所示。图 11(a)为常规设计方案,通常采用



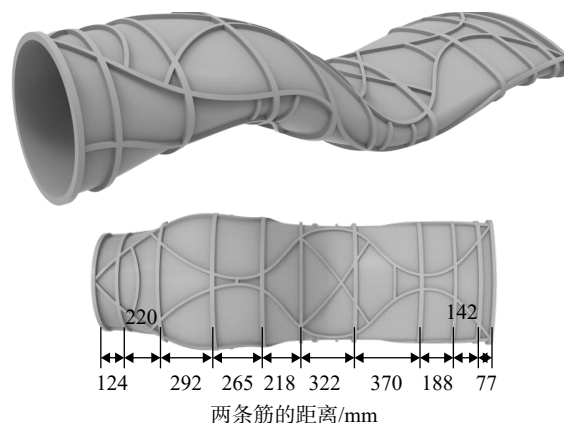
(a) 常规设计方案



(b) $\overline{d}_{ik}^s=200\text{ mm}$



(c) $\overline{d}_{ik}^s=300\text{ mm}$



(d) $\overline{d}_{ik}^s=400\text{ mm}$

图 11 不同优化构型下的重构设计方案

Fig. 11 Rebuilt models for optimized configurations

均匀布局的井字形加强筋布局形式。图 11(b)~图 11(d)为拾取不同优化构型中的主要传力路径而重构的设计方案,方案中的定向环筋之间的间距参照优化构型采用空间变化的布局方式。在保证各方案的结构质量、约束边界与载荷均相同的前提下,根据优化构型重构设计方案中的最大变形位移均小于常规设计方案。不同参数下的重

构模型为 S 弯管结构设计提供了详细可供参考的加筋布局方案。

6 结 论

本文提出的基于拓扑优化的 S 弯管加筋布局设计方法实现了 S 弯管结构的自由筋与定向环筋共存的优化构型。在 200~400 mm 之间不同搜索长度上限下得到的优化构型均具有清晰的传力路径, 定向环筋之间的间距能够得到精确控制, 且筋的最大尺寸得到了有效的控制, 并且引入变量链接控制的优化构型中出现了规则完整的定向环筋。因此, 可根据 S 弯管在制造中的实际需求确定定向搜索长度上限值, 得到的优化构型中环筋的空间布局可丰富 S 弯管制造中拼接截面的选择。结合不同搜索长度上限下的优化构型进行重构设计, 并对重构设计方案进行有限元校核, 与常规井字形加强筋布局形式的设计方案对比, 在相同结构质量下本项目中各个重构设计方案的最大变形位移均小于常规方案, 其中环筋间距为 200 mm 的重构设计方案最大变形位移降低最大为 17.1%。

此外, 基于本文所提出的多材料尺寸控制方法, 后续研究可沿以下方向展开: 一是将该方法拓展至薄壁结构的加筋布局优化, 以进一步提高其抗屈曲性能; 二是发展更灵活的局部尺寸搜索策略, 以适应复杂几何构型与多样化设计需求; 三是引入考虑温度场与材料性能耦合的拓扑优化模型, 从而提升高温环境下结构响应的预测精度与设计可靠性。

参考文献:

- [1] 刘长春, 吉洪湖. S 弯二元喷管红外辐射特性实验[J]. 航空动力学报, 2019, 34(7): 1493-1500.
LIU Changchun, JI Honghu. Experiment on infrared radiation characteristics of S shaped 2D nozzle[J]. Journal of Aerospace Power, 2019, 34(7): 1493-1500. (in Chinese)
- [2] 程稳, 周莉, 王占学, 等. 几何参数对 S 弯喷管红外辐射特性的影响[J]. 推进技术, 2018, 39(9): 1974-1985.
CHENG Wen, ZHOU Li, WANG Zhanxue, et al. Effects of geometric parameters on infrared signature of serpentine nozzle[J]. Journal of Propulsion Technology, 2018, 39(9): 1974-1985. (in Chinese)
- [3] ZHU Jihong, ZHANG Weihong, XIA Liang. Topology optimization in aircraft and aerospace structures design[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2016, 23(4): 595-622.
- [4] REMOUCHAMPS A, BRUYNEEL M, FLEURY C, et al. Application of a bi-level scheme including topology optimization to the design of an aircraft pylon[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2011, 44(6): 739-750.
- [5] ZHU Jihong. Advanced structural topology optimization and application [C]// Proceedings of Association for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization and Application Conference, Paris, France: [s. n.], 2010: 21-23.
- [6] KROG L, TUCKER A, KEMP M, et al. Topology optimisation of aircraft wing box ribs: AIAA-2004-4481 [R]. New York: AIAA, 2004.
- [7] 柴文伟, 潘鹤, 褚小云, 等. 拓扑优化技术在复杂内流道壳体轻量化设计中的应用研究[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2023, 36(5): 49-55.
CHAI Wenwei, PAN He, CHU Xiaoyun, et al. Research on the application of topology optimization technology in lightweight design of complex internal flow channel shells[J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2023, 36(5): 49-55. (in Chinese)
- [8] LI Yang, GAO Tong, ZHOU Qianying, et al. Layout design of thin-walled structures with lattices and stiffeners using multi-material topology optimization[J]. Chinese Journal of Aeronautics, 2023, 36(4): 496-509.
- [9] LI Yedan, QIU Wenke, LIU Zhen, et al. A multi-material topology optimization approach to hybrid material structures with gradient lattices[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2024, 425: 116969.
- [10] LI Yang, GAO Tong, HUANG Yongbin, et al. Layout optimization design method for thermo-elastic thin-walled structures with lattices and stiffeners[J]. Advances in Engineering Software, 2025, 208: 103962.
- [11] HUANG Yongbin, GAO Tong, SONG Longlong, et al. Layout design of lattice-stiffener hybrid core for composite sandwich panel and experimental verification[J]. Computers & Structures, 2025, 316: 107910.
- [12] 薛丁维, 黄盛, 廖华琳. S 弯喷管与后机身腹板式传力结构优化设计研究[J]. 燃气涡轮试验与研究, 2025, 38(1): 87-100.
XUE Dingwei, HUANG Sheng, LIAO Hualin. Optimization design of serpentine nozzle and load transfer structure of rear fuselage web plate[J]. Gas Turbine Experiment and Research, 2025, 38(1): 87-100. (in Chinese)
- [13] HUANG Lei, GAO Tianhe, SUN Zhiyong, et al. An integrated topology and shape optimization framework for stiffened curved shells by mesh deformation[J]. Engineering with Computers, 2024, 40(3): 1771-1793.
- [14] RODRIGUES H, FERNANDES P. Topology optimal design of thermoelastic structures using a homogenization method[J]. Control and Cybernetics, 1994, 23(3): 553-563.
- [15] CHO S, CHOI J Y. Efficient topology optimization of thermo-elasticity problems using coupled field adjoint sensitivity analysis method[J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2005, 41(15): 1481-1495.
- [16] GAO Tong, ZHANG Weihong. Topology optimization involving thermo-elastic stress loads[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2010, 42(5): 725-738.
- [17] DEATON J D, GRANDHI R V. Stress-based design of thermal structures via topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2016, 53(2): 253-270.
- [18] YANG Xiongwei, LI Yueming. Structural topology optimization on dynamic compliance at resonance frequency in thermal environments[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2014, 49(1): 81-91.
- [19] MATSUMORI T, KAWAMOTO A, KONDOH T. Topology optimization for thermal stress reduction in power semiconductor mod-

- ule[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 60(6): 2615-2620.
- [20] SHI Guanghui, GUAN Chengqi, QUAN Dongliang, et al. An aerospace bracket designed by thermo-elastic topology optimization and manufactured by additive manufacturing[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2020, 33(4): 1252-1259.
- [21] ZHAO Xi, ZHOU Mingdong, LIU Yichang, et al. Topology optimization of channel cooling structures considering thermomechanical behavior[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 59(2): 613-632.
- [22] ZHU Xuefeng, ZHAO Chao, WANG Xuan, et al. Temperature-constrained topology optimization of thermo-mechanical coupled problems[J]. *Engineering Optimization*, 2019, 51(10): 1687-1709.
- [23] SONG Longlong, GAO Tong, TANG Lei, et al. An all-movable rudder designed by thermo-elastic topology optimization and manufactured by additive manufacturing[J]. *Computers & Structures*, 2021, 243: 106405.
- [24] MENG Liang, ZHANG Weihong, QUAN Dongliang, et al. From topology optimization design to additive manufacturing: today's success and tomorrow's roadmap[J]. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 2020, 27(3): 805-830.
- [25] MHAPSEKAR K, MCCONAHA M, ANAND S. Additive manufacturing constraints in topology optimization for improved manufacturability[J]. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 2018, 140(5): 051017.
- [26] VATANABE S L, LIPPI T N, DE LIMA C R, et al. Topology optimization with manufacturing constraints: a unified projection-based approach[J]. *Advances in Engineering Software*, 2016, 100: 97-112.
- [27] GUEST J K. Imposing maximum length scale in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009, 37(5): 463-473.
- [28] FERNÁNDEZ E, COLLET M, ALARCÓN P, et al. An aggregation strategy of maximum size constraints in density-based topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 60(5): 2113-2130.
- [29] SONG Longlong, ZHAO Jian, GAO Tong, et al. Length scale control in density-based multi-material topology optimization[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2022, 401: 115655.
- [30] SONG Longlong, GAO Tong, WANG Jie, et al. Directional maximum length scale control in density-based topology optimization[J]. *Computers & Structures*, 2024, 292: 107236.
- [31] SONG Longlong, GAO Tong, ZHANG Weihong. Topology optimization method for high-aspect-ratio wing considering geometric nonlinearity with bending and torsion controls[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2025, 42(4): 424113.
- [32] SIGMUND O, PETERSSON J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. *Structural Optimization*, 1998, 16(1): 68-75.
- [33] WANG Fengwen, LAZAROV B S, SIGMUND O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(6): 767-784.
- [34] GAO Tong, ZHANG Weihong. A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2011, 88(8): 774-796.

(编辑: 王碧珩)