

文章编号:1000-8055(2020)12-2489-16

doi:10.13224/j.cnki.jasp.2020.12.003

非恒定增压式微尺度拉瓦尔喷管流动特性

许 啸¹, 王园丁^{2,3}, 张 军⁴, 沈 屹⁴, 沈 妍¹

(1. 江苏科技大学(张家港校区)机电与动力工程学院, 江苏 苏州 215600;

2. 上海空间推进研究所 研究发展中心, 上海 201112;

3. 上海空间发动机工程技术研究中心, 上海 201112;

4. 南京航空航天大学 航空学院, 南京 210001)

摘 要: 针对微尺度喷流在航天器运动状态切换时出现的非恒定增压变化,采用直接模拟蒙特卡洛(DSMC)方法对阶跃式增压和线性式增压两种模式下的微尺度拉瓦尔喷管流场进行了模拟,并对其变化过程中的流动特性进行了对比分析。结果显示:阶跃式增压会导致流动特性出现较大幅度的峰谷式波动,而线性式增压下的流动特性则呈现出线性变化的特点;黏性力对微尺度喷流的非恒定增压变化产生了重要的黏滞作用,在喉部扩张段至出口的流场中尤为明显;在设定的条件下,阶跃式增压过程中喷流产生的总冲量较线性式增压高 59.5%,质量流量高 74.7%,单位工质提供的冲量低约 8.6%,波动性也高于线性式模型,阶跃式增压适用于系统需要较大推力改变运动状态且推进剂充足的情况,而线性式增压在系统精确微调或需要推进剂产生更高效能时具有明显的优势。

关键词: 非恒定增压; 微尺度流动; 拉瓦尔喷管; 直接模拟蒙特卡洛(DSMC)方法; 微尺度喷流特性
中图分类号: V211.3 **文献标志码:** A

Unsteady pressure boost micro-scale Laval nozzle flow characteristics

XU Xiao¹, WANG Yuanding^{2,3}, ZHANG Jun⁴, SHEN Yi⁴, SHEN Yan¹

(1. School of Mechatronics and Power Engineering,

Jiangsu University of Science and Technology (Zhangjiagang), Suzhou Jiangsu 215600, China;

2. Research and Development Center,

Shanghai Institute of Space Propulsion, Shanghai 201112, China;

3. Shanghai Engineering Research Center of Space Engine, Shanghai 201112, China;

4. College of Aerospace Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210001, China)

Abstract: Targeting the unsteady pressure boost of the micro-scale jet when the spacecraft motion state was switched, the micro-scale Laval nozzle flow in the stepped pressure boost and linear pressure boost modes was used to simulate by direct simulation of Monte Carlo (DSMC) method, and comparative analysis of the flow characteristics in the process of change was done. Results showed that step-type pressure boost could cause a large amplitude peak-valley fluctuation in the flow characteristics, while the flow characteristics under linear pressure boost showed the characteristics of linear change; the viscous force played an impor-

收稿日期: 2020-04-17

基金项目: 国家自然科学基金青年科学基金(11902125); 江苏省高等学校自然科学研究面上项目(18KJB130002); 国家重点研发计划资助项目(2018YFC0310400)

作者简介: 许啸(1986—),男,讲师,博士,主要从事稀薄气体动力学计算方法研究。

引用格式: 许啸,王园丁,张军,等.非恒定增压式微尺度拉瓦尔喷管流动特性[J].航空动力学报,2020,35(12):2489-2504. XU Xiao, WANG Yuanding, ZHANG Jun, et al. Unsteady pressure boost micro-scale Laval nozzle flow characteristics[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(12): 2489-2504.

tant role in the unsteady pressure boost of micro-scale jet, especially in the flow field from the expansion section of the throat to the outlet; the total impulse, mass flow rate produced by the micro-scale jet and the impulse provided by unit quality working medium during the stepped pressure boost process was 59.5%, 74.7% higher, and 8.6% lower than the characteristics in linear pressure boost process, meanwhile, the volatility of the stepped pressure boost process was more obvious than the linear pressure boost process. It can be seen that the stepped pressure boost mode is suitable for system that requires large thrust to change the motion state and has sufficient propellant, and the linear pressure boost has obvious advantages when the system needs to be fine-tuned precisely or the propellant is required to produce higher efficiency. These research conclusions provide an effective reference for the design and optimization of micro-scale nozzles under different system conditions.

Key words: unsteady pressure boost; micro-scale flow; Laval nozzle; direct simulation of Monte Carlo (DSMC) method; micro-scale jet characteristics

21 世纪以来,随着航天科技的不断发展,各类航天器对能够提供极低推力的微尺度推进系统的需求正日益增加。一方面,微纳卫星、小型运载火箭等备受瞩目的微尺度航天器的发射和控制需要与其体积和质量相匹配的微推动力;另一方面,为适应现代航天工程的需求,传统航天器在一些特殊任务中要保持前所未有的位置精度,也需要微牛顿量级的推进系统以辅助其进行空间校正。据此,作为微推进系统中最重要部件之一的微尺度喷管,其内部的流动特性正成为航天技术领域的研究焦点和热点。

微尺度喷流研究可追溯至 20 世纪 70 年代。1971 年, Rothe 等^[1]采用电子束测试方法对微尺度喷管内的流动黏性进行了研究,得出了喷管内的黏性效应将随雷诺数的减小而显著增大的结论。Grisnik 等^[2]针对直径在 700 μm 左右的微尺度喷管进行了实验,发现雷诺数在 1 000~9 000 的范围内,微尺度喷流的比冲随雷诺数的增大而提高。进入 21 世纪后,微尺度喷流技术开始进入航天、微机电系统(MEMS)等前沿工程领域, Lewis 等^[3]开发了基于固体推进剂的数字化微型推进系统,这种系统采用斯蒂芬酸为固体推进剂,并通过通电点火的方式点燃推进剂形成喷流。Bayt 等^[4]共同研发了以惰性气体为工质的冷喷流微尺度推进器,获得了较大的推力,但由于工质温度较低,其推进效率并不理想。随着计算机技术的不断发展,数值方法开始越来越多的应用于微尺度喷流的研究。Alexeenko 等^[5]使用直接模拟蒙特卡罗(DSMC)和 Navier-Stokes(N-S)方法模拟二维轴对称和三维微喷流,发现喷流黏性

效应主要源于气体膨胀,同时由于管内壁面黏性效应,推力明显下降。Wang 等^[6]使用 DSMC 方法研究了 MEMS 微喷嘴在中低温下的性能特点,经过比较后发现分子量较小的气体可以产生更高的比冲量,但产生的推力却较小。Titov 等^[7]提出了基于碰撞限制器的扩展型 DSMC 方法(eDSMC),并采用改进后的方法对三维微喷管流动进行了研究,结果显示 DSMC 方法的模拟结果与 N-S 方法相比具有更高的滞止压力和滞止温度。Ranjan 等^[8]采用实验和 CFD 数值软件相结合的方法,对真空和一定大气压条件下的微尺度冷喷流系统的工作状态及特性进行了研究。Rafi 等^[9]采用 DSMC/N-S 耦合方法对微尺度喷流进行了研究,结果表明不同的壁面热条件和几何条件将会对微喷管内边界层的发展和出口羽流结构构成明显的影响。Cai 等^[10]采用网格粒子方法(PIC)与 DSMC 方法对特定等离子体环境中的微尺度羽流进行了研究,其结果表明分子数密度在离子推进器的极板前显著增加,并对电荷交换离子(CEX)的分布有进一步的影响。张先锋^[11]采用实验和数值模拟方法相结合的方式,对连续介质模型的适用范围、不同类型的喷管条件和微尺度流动的混合方式及其影响进行了详尽的研究。刘赵森等^[12-13]采用 N-S 方法对微尺度拉瓦尔喷管内流动的“超声速环”现象与机理进行了研究,并结合 DSMC 方法对不同喉部形状的微尺度拉瓦尔喷管性能进行了对比分析。杨海威等^[14]采用 DSMC 方法模拟了不同入口温度条件下的微尺度拉瓦尔喷管流动,结果表明随着入口温度

的提高,喷流推力减小而比冲增大。张赛文^[15]采用基于弱耦合信息传递机制的 N-S/DSMC 耦合方法对微尺度喷管内部流动和外部羽流场进行了模拟。

根据上述分析,微尺度喷流的主要研究思路是探索和开发适用于微型喷流的实验和数值方法,并以此为基础分析不同流动状态、结构参数等因素对微尺度喷管的比冲、推力、雷诺数等特性参数的影响。一般而言,微尺度喷流的时间跨度与宏观流动相比极其微小,因此在研究过程中往往将喷管进出口的流动条件设为恒定值,并通过改变这些恒定值来获得不同的分析结果。然而,当微尺度喷流进行运动状态调节时,由于喷流形成方式的不同,喷流入口的局部压力在微观尺度上仍会体现出非恒定变化的特点,而受实验条件等各方面的限制,针对微尺度时空内喷管入口非恒压变化对流动影响的研究则较为少见。为此,本文以 DSMC 方法为基础,通过建立阶跃式和线性式两种模型,研究喷管入口非恒定增压对微尺度喷流特性造成的影响,为微尺度喷管的设计与优化工作提供参考。

1 微推进技术与数值方法

1.1 微推进技术概述

微推进技术最早可追溯至 20 世纪 90 年代,在 MEMS 技术发展浪潮的推动下,微推进系统研究开始展露头角,例如 Ketsdever 和 Mueller^[16-17]在 1997 年提出将 MEMS 系统作为微推进技术的研究方向,通过 MEMS 系统的灵活性实现小型化微纳推理系统的设计等。微推进技术发展至今,按其工作过程和能量转换方式的不同,可以分为以下几种主要类型^[18]:

1) 冷推进。冷推进是一种较为传统的推进方式,一般采用高压储液的方式保存推进工质,并通过开关阀门的方式释放和关闭管内流体以形成喷流。该系统结构简单,成本低廉,除阀门以外无额外功率消耗;但与其他推进方式相比,冷推进系统的比冲偏低,推进剂储液箱体积和质量偏大,阀门处易出现泄露。虽然冷推进技术相对简单且提供的推力较低,但其低成本、易控制的优势仍使其在航天器领域无法被完全替代。

2) 化学推进。化学推进系统采用化学反应方法,通过燃烧、放热分解将工质的化学能转换为热能,然后通过喷管膨胀加速,将燃气的热能转化为动能,为航天器提供推力。化学推进系统能

够释放工质的化学键能,因此相对于冷推进,该系统能够提供更高的比冲,而且由于可携带液态或固态反应物,其燃料储备箱的体积可以设计得相对较小;但另一方面,由于工质的比例、温度等状态因素受化学反应条件的限制,化学推进系统的阀门控制精度和防泄漏能力要求较高,一旦反应控制失当,系统可能出现爆炸的危险。该系统的代表有数字式固体微推进系统和单双组元液体微推进系统等,常见的推进剂有硝酸羟胺、 $\text{NH}_3\text{OH}\cdot\text{NO}_3$ 、二硝酸胺、四氧化二氮/一甲基肼等^[19]。

3) 电推进。电推进技术主要通过不同的机理将电能转化为工质气体的动能产生推力。按照机理的不同,电推进技术主要可以分为电热式、静电式和电磁式 3 种。电热式系统主要采用电加热的方式生成高温工质,进而通过喷管将热能转化为动能形成喷流,其代表有电阻加热式和电弧加热式^[19];静电式系统首先采用高压电场激励将气态推进剂转化为等离子态,然后通过静电场对等离子体进行加速形成喷流;电磁式系统采用电场激励推进剂产生等离子体,并经过电磁场中电场力/洛伦兹力的综合作用产生高速喷流。整体来看,电推进系统的推进机理虽各有不同,但其均具有可控性高、工作稳定、安全可靠高等优势。另外,电推进系统的推进能力跨度很大,电弧加热喷气推力器(arcjet)的推力最低可达 5 mN,而磁等离子体微推进器(MPDT)的最高推力可达 200 000 mN^[19],适合多种类型的航天器和不同要求的航天任务。因此,电推进系统在航天领域得到了广泛的关注,大量应用于卫星、深空探测器等航天器中。

4) 激光推进。激光推进系统的工作原理与电弧推进系统类似,不同之处是采用激光替代了电弧,利用激光器中发射出来的激光源,经过光学器件聚焦而获得高能量的激光照射到推进剂材料表面,烧蚀产生高温高压等离子体,再通过喷嘴形成高速喷流从而产生推力^[20]。与化学推进相比,激光推进系统需要携带的工质相对较少,因此其能耗低而载荷比高;系统无需携带易燃易爆工质,工作安全可靠性好;激光能量控制精度高,推力调节范围大,是一种极具潜力的推进技术,现已在小型卫星上广泛使用。

1.2 微喷管特性参数

在微推进系统中,推进性能参数是衡量其综

合能力的主要指标。一般来说,推力和比冲是描述微推进系统性能的两大重要指标,而由于这两种参数的计算涉及到质量流量,该性能参数也通常被纳入比较范围。为实现航天器精确的定位和姿态调整,微推进系统必须具有足够大的比冲和高精确度的推力^[11]。另外,微喷管的尺度极小,其内部流动的雷诺数与宏观流动相比低得多,因此管内流动受黏性的影响较为显著,为描述这一特征,通常取微喷管的喉部雷诺数进行比较和分析。在二维条件下,推力 F_t 、质量流量 \dot{m} 、比冲 I_{sp} 和喉部雷诺数 Re_t 的计算公式如下:

$$F_t = \int_0^{L_{out}} (\rho_e u_e^2 + p_e) h_0 dy \quad (1)$$

$$\dot{m} = \int_0^{L_{out}} \rho_e u_e h_0 dy \quad (2)$$

$$I_{sp} = \frac{F_t}{\dot{m}g} \quad (3)$$

$$Re_t = \frac{\rho u L_t}{\mu} \quad (4)$$

式中 ρ_e 、 u_e 和 p_e 分别代表出口位置的密度、速度和压力, g 为重力加速度, L_{out} 和 h_0 分别代表喷管的出口宽度和刻蚀深度, ρ 和 u 分别代表喉部密度和速度, L_t 代表喉部宽度, μ 代表气体动力黏度^[11]。本文将在数值模拟中对上述特性参数进行重点分析和研究。

1.3 DSMC 方法

微喷管中的流动特征尺度极小,导致其内部流动的克努森数(Kn)远高于宏观尺度流动,从而体现出明显的稀薄特征。在稀薄流动中,连续介质假设开始失效,传统的 N-S 方程在计算时将出现偏差^[11]。为此,本文采用 DSMC 方法对微尺度喷流进行数值模拟。

DSMC 方法最初由 Bird 提出^[21],该方法直接从流动物理模型出发,采用大量的模拟分子代替真实气体分子,在模拟流场时将分子运动和碰撞相互解耦,即将分子的真实运动划分为移动和碰撞两个过程,分子的移动过程可以描述为单位时间内分子在速度方向上的位移,碰撞过程则需要选取合适的分子碰撞对,并采用合理的模型对碰撞后的分子物理信息进行处理。当流场最终趋于稳定时,采用分子统计的方法得出单元中的宏观状态参数。DSMC 方法直接处理分子的物理运动过程,与直接求解 Boltzmann 方程相比,不仅更易于引入真实情况下的物理运动模型,而且已被证明收敛于 Boltzmann 方程,其可行性和正确

性均已得到大量的验证^[22-23],因此广泛应用于稀薄气体流动模拟。

2 数值方法验证

为验证数值方法的正确性,本文采用非结构网格 DSMC 方法对文献[11]中研究的二维微尺度拉瓦尔喷管内部流动进行了数值模拟。根据文献中的分析结果,该流动中的 Kn 最大为 0.025,即该流动已经离开了连续流区,进入了过渡区的滑移领域,因此采用 DSMC 方法进行计算是合理的。该模型的结构和尺寸如图 1 所示。在计算条件中,喷流模式为冷喷流,气体种类为氮气,假设为理想气体;进出口均为压力边界,进口压力为 101.325 kPa(1atm)和 10.1325 kPa(0.1atm),出口压力为 10 Pa;气体滞止温度和壁面温度均为 300 K,蚀刻深度为 300 μm 。在进行数值模拟时,为加快计算速度,本文取喷管流动对称面以上的半区域进行模拟,划分网格时综合考虑气体分子自由程和计算负荷状况,将网格平均尺寸设定为 0.8 μm ,此时网格单元数量为 42418,模拟分子数约 93.7 万。

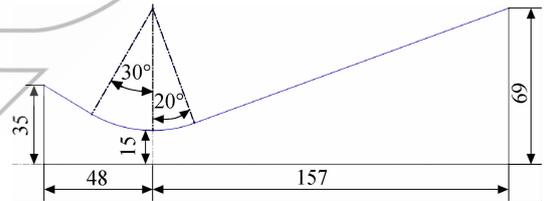


图 1 微尺度拉瓦尔喷管结构(单位: μm)

Fig. 1 Structure of the micro-scale Laval nozzle (unit: μm)

图 2 和图 3 分别给出了进口压力为 101.325 kPa 和 10.1325 kPa 时的流场计算结果。从图中可以看出,微喷管内的流动基本可以分为 3 部分:收缩段、喉口和扩张段。在收缩段,气体首先受渐缩结构的影响被压缩,此时气流处于亚声速流动状态,速度开始上升,但密度(ρ)、温度(T)和压力无明显变化,仅在近壁面处受压缩效应形成了极薄的高密度和高压力层区域;在喉口处,气流速度达到声速并呈现出迅速上升的趋势,此时流场中各物理量梯度均急剧增大,管内的亚声速流动快速向超声速流动过渡;进入扩张段后,气流速度升高至马赫数 $Ma=1.2$ (当地声速)以上,形成标准的超声速流动,并在扩张结构的影响下继续膨胀,密度和压力沿主流动方向逐渐降低,而受壁面黏

性和恒温条件的影响,温度与马赫数则沿扩张段壁面的法线方向逐步降低和升高,形成较厚的边界层。图 3 中展示的流场变化趋势与图 2 相比基

本一致,而其最大的区别在于温度和速度边界层的厚度明显增加。这是由于当进出口压差下降

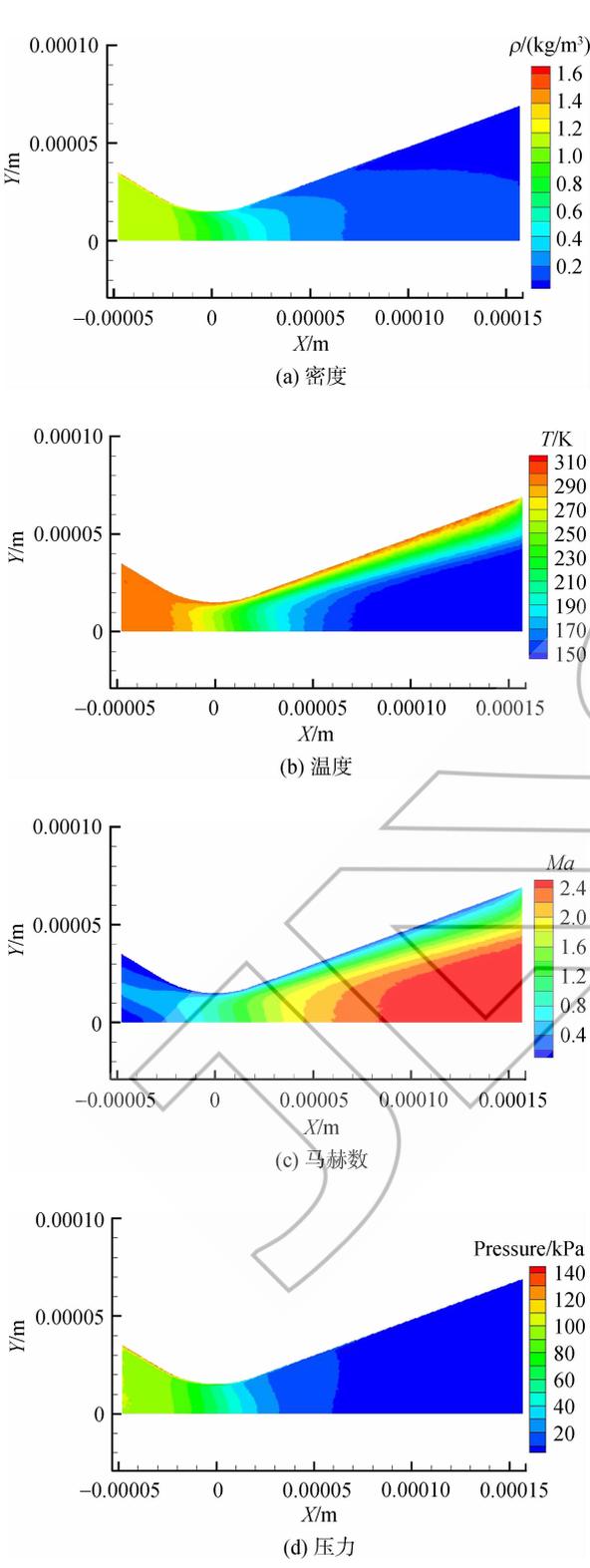


图 2 进口压力为 101.325 kPa 时微尺度喷管内的流场结果
Fig. 2 Flow field in a micro-scale nozzle at an inlet pressure of 101.325 kPa

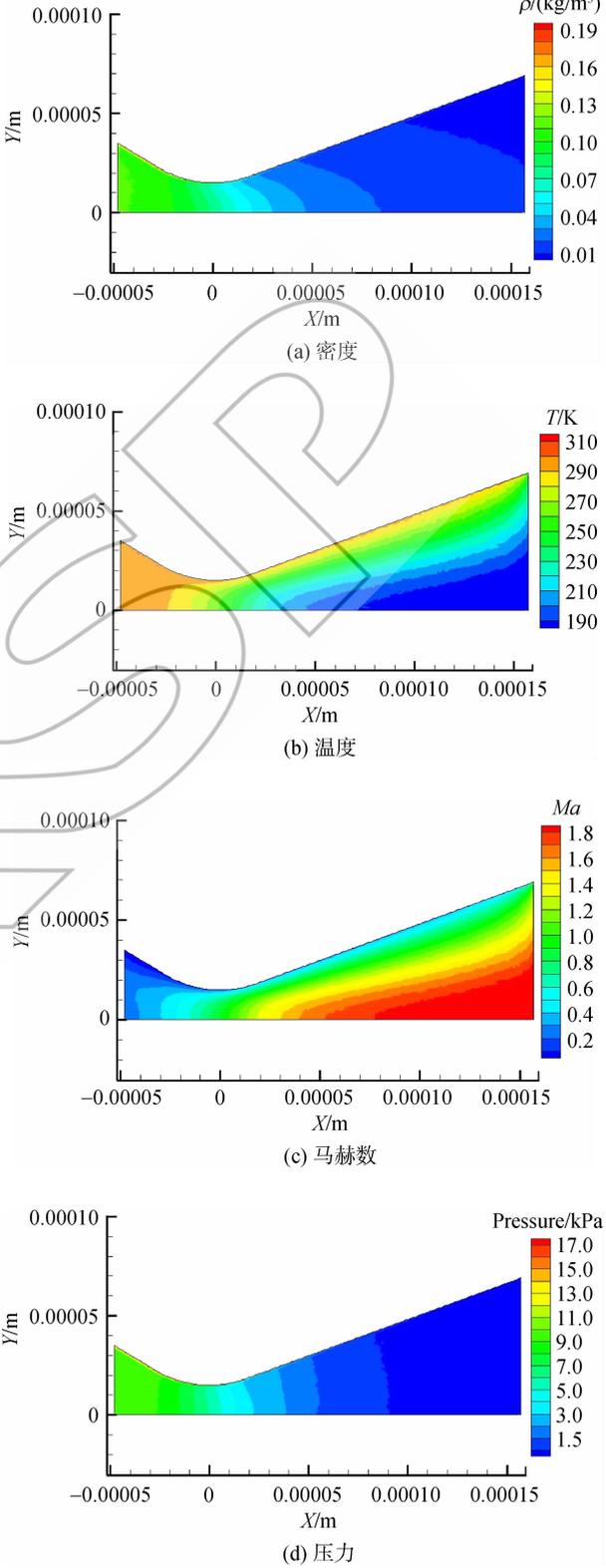


图 3 进口压力为 10.1325 kPa 时微尺度喷管内的流场结果
Fig. 3 Flow field in a micro-scale nozzle at an inlet pressure of 10.1325 kPa

时,管内流速随之下降,导致扩张段的壁面黏性对流动产生了更大的影响。图 2 和图 3 清晰的展现了微尺度拉瓦尔喷管中的流场结构,其反映的流动趋势与文献[11]中所述基本一致,据此可以初步证明本文数值方法的正确性。

图 4 和图 5 分别给出了进口压力为 10.1325 kPa 和 101.325 kPa 时喷管中心线和出口边界处的温度和马赫数分布情况。从图中可以看出,在喷管加速效应的影响下,管内气体温度随速度的提高呈不断下降的趋势,其中喉部速度梯度变化最为剧烈,温度下降趋势也最为明显;在出口处,气体速度分布沿 Y 轴方向呈先持平随后急速下降的趋势,根据图中显示的结果,当进口压力为 101.325 kPa 时,喷管加速效应所形成的最大流动速度区主要集中在中心线附近,约占出口边界的

1/3 处,其余部分的气体则在壁面黏性的影响下不断降速,直至在出口上边缘处形成 $Ma = 0.75$ 的亚声速流动。图 4 和图 5 中结果对比显示,本文 DSMC 方法的计算结果与参考文献[11]中的结果变化趋势一致,仅扩张段中心线上的温度略有不同,最大差异为 3.1%;此外,表 1 给出了进口压力为 101.325 kPa 时微尺度喷管推力、比冲和喉部雷诺数的比较,结果显示,3 种特性参数值基本一致,产生误差的主要原因是虚拟分子数、单元数等计算条件不完全一致,而两者结果对比相差均在 10% 以内,据此可以进一步证明本文数值方法的正确性。

表 1 进口压力为 101.325 kPa 时推力、比冲和喉部雷诺数比较

Table 1 Comparison of thrust, specific impulse and throat Reynolds number when inlet pressure is 101.325 kPa

方法	推力/(mN)	比冲/s	喉部雷诺数
本文方法	1.27	66.94	425.44
文献[11]	1.41	67.70	462.80

3 非恒压入口型喷管流动特性分析

根据上文概述,现代微推进技术主要采用能量转换的方式,将推进系统中的化学能、电磁能、压能或光能转换为推进气体的内能和动能,并通过喷管形成高速喷流气体,为航天器提供推动力。从控制方式来看,微推进系统大体可以分为两类:一类以冷推进和化学推进系统为主,这类系统以被动式阀门调节为主,虽然阀门可由电系统控制,但其仍属于机械控制范畴,因此控制精度相对较低;另一类以电推进和激光推进系统为主,这类系统可通过主动调节电磁场或激光强度来控制系统的推力,控制精度相对较高。在微尺度喷流中,当推进系统进行推力状态调节时,高精度控制系统所形成的推进气流压力相对稳定,其变化趋势接近于线性;而当控制系统的精度偏低时,气流压力则呈现出阶跃式变化的特征。为此,本文分别建立了阶跃式和线性式非恒定增压模型,以文献[11]中的微尺度拉瓦尔喷管为研究对象,喷流方式设定为冷喷流,采用 DSMC 方法模拟不同的非恒定增压模式下微尺度喷流的形成和变化过程,并对其结果进行分析和研究。

3.1 阶跃式增压

本文设置的阶跃式增压模型如图 6 所示。为

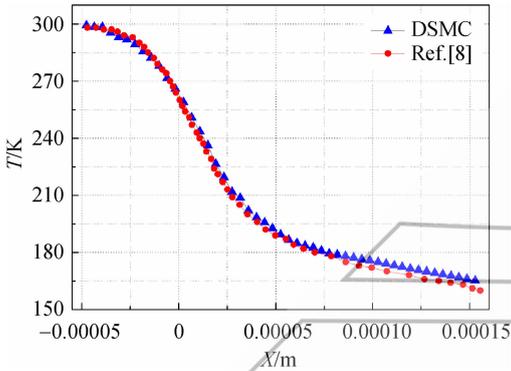


图 4 进口压力为 10.1325 kPa 时喷管中心线上的温度值比较
Fig. 4 Comparison of the temperature on the center line of the nozzle when the inlet pressure is 10.1325 kPa

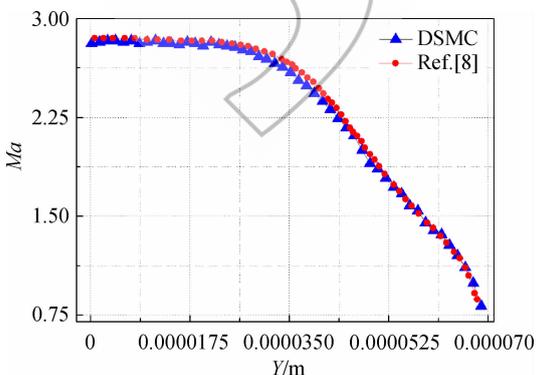


图 5 进口压力为 101.325 kPa 时出口边界上的马赫数分布比较
Fig. 5 Comparison of the Mach number on the outlet boundary when the inlet pressure is 101.325 kPa

保持计算时间间隔的一致性以明确压力变化过程的时间跨度,经过测试,本文将计算时间步长统一设定为 3.5×10^{-11} s,入口压力 (p_{in}) 从 10.1325 kPa 上升至 101.325 kPa,即初始时入口压力设为 10.1325 kPa,在第 1.05×10^{-6} s (时间步 $t_s = 30000$) 时突升至 120 kPa,在第 2.1×10^{-6} s ($t_s = 60000$) 时降至 85 kPa,随后在第 3.15×10^{-6} s ($t_s = 90000$) 时入口压力回到标准值 101.325 kPa,此后入口压力恒定不变至流场稳定。其他参数与文献[11]中的计算条件保持一致。

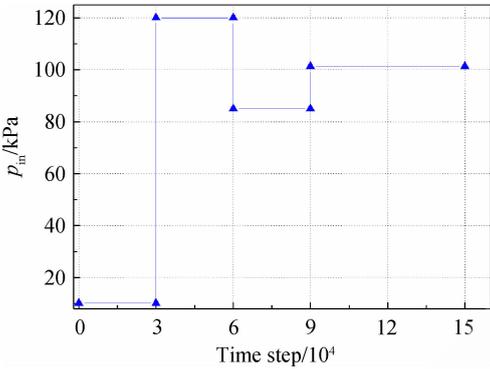
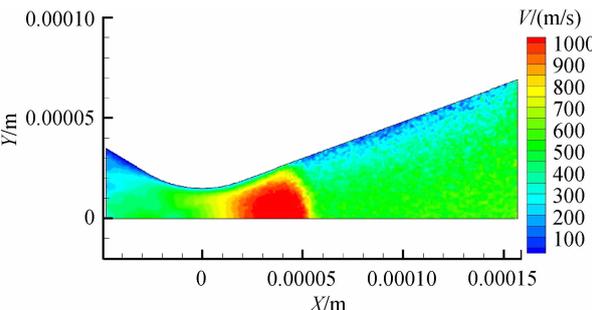


图 6 阶跃式增压模型

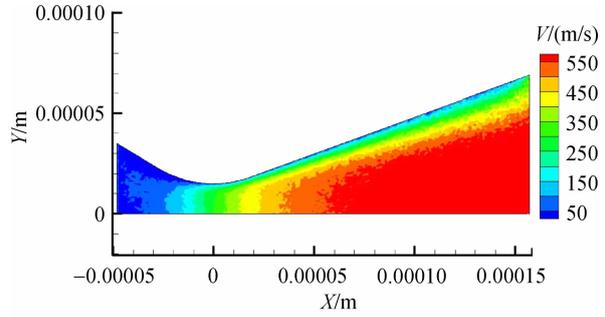
Fig. 6 Stepped pressure boost mode

图 7 和图 8 给出了阶跃式增压过程中不同时刻的流场速度 (V) 和压力云图,由于图中主要结果为 DSMC 方法的即时计算结果,流动并未稳定,不可避免的带有统计涨落,但流场结构仍比较完整,基本能够反映其变化特征。为明确体现阶跃式压力变化对流场的作用,通过算例测试比较,本文统一取入口压力发生不同阶跃式变化后 8.75×10^{-8} s ($\Delta t_s = 2500$) 的即时计算结果来反映压力阶跃对管内流场的实时影响,并综合稳定时的统计结果一同进行分析和比较。

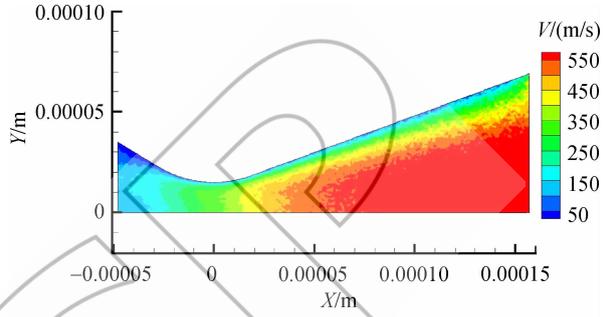
图 7 和图 8 中结果主要显示了 3 次压力阶跃对流场形成的影响:第一次阶跃时,入口压力急升至 120 kPa,压力极高的来流受收缩段的影响,被



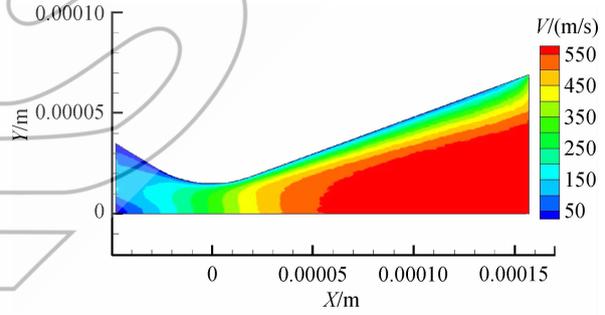
(a) 第 1.1375×10^{-6} s (32500 时间步)



(b) 第 2.1875×10^{-6} s (62500 时间步)



(c) 第 3.2375×10^{-6} s (92500 时间步)

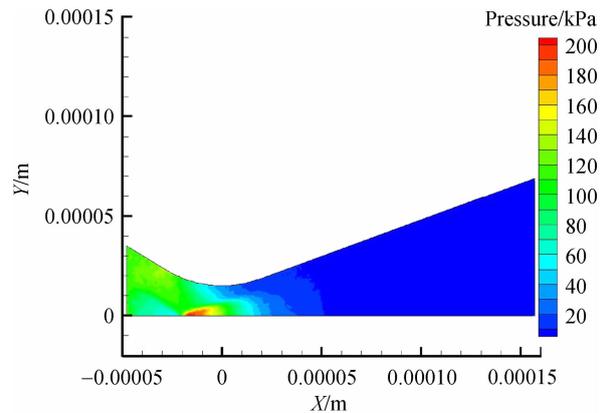


(d) 流动稳定

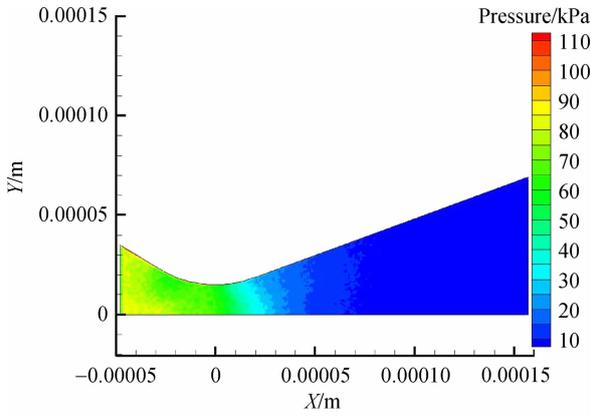
图 7 阶跃式增压过程中的流场速度云图

Fig. 7 Velocity of the flow field during the stepped pressure boost process

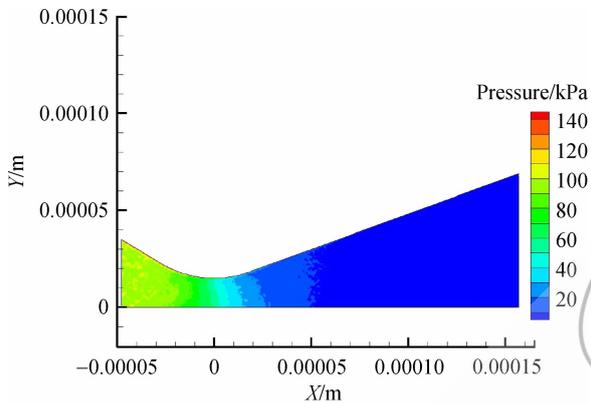
进一步压缩,在喉部前方的对称面处形成了高压区,并在高压推动的作用下,经过扩张段进一步加速成为超声速流动,以激波的形式向出口方向运



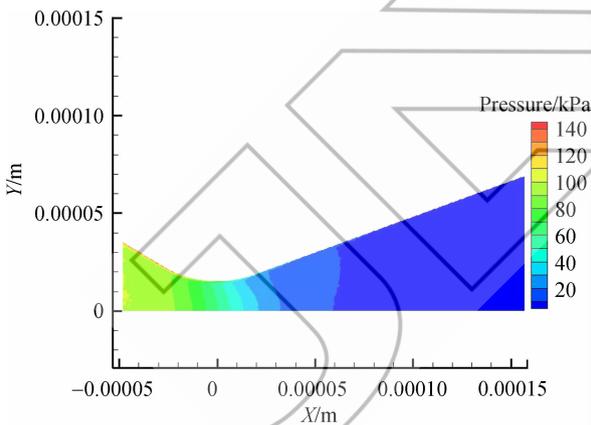
(a) 第 1.1375×10^{-6} s (32500 时间步)



(b) 第 2.1875×10^{-6} s (62500时间步)



(c) 第 3.2375×10^{-6} s (92500时间步)



(d) 流动稳定

图 8 阶跃式增压过程中的流场压力云图

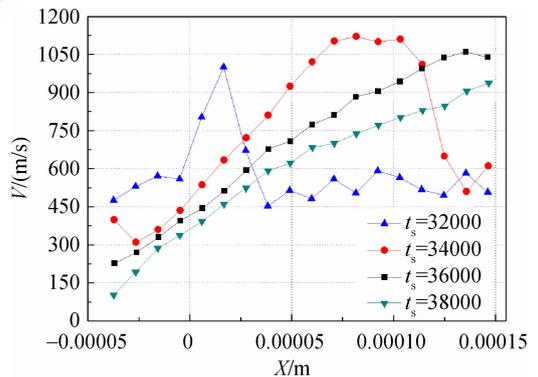
Fig. 8 Pressure of the flow field during the stepped pressure boost process

动,将入口压力阶跃的影响传播到整个管道;第二次阶跃时,入口压力降至 85 kPa,受降压影响,喷管收缩段至喉部的速度和压力均明显下降,管内压力梯度和速度梯度也随之降低,但气流在扩张段的边界层结构基本稳定且层次比较清晰,这说明当入口压降幅度较小时,扩张段气流的黏性力影响较大,限制了入口压力波动造成的影响;第三次阶跃时,入口压力回升至标准值 101.325 kPa,

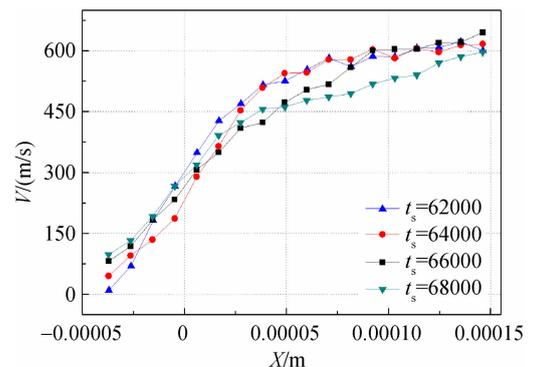
入口压力的跃增使收缩段的气流速度、压力及速度梯度、压力梯度均有所上升,但压力跃增幅度相对更小,扩张段的气流黏性对压力波动的阻滞效果更加明显,因此扩张段流场结构基本保持着入口压力跃增前的状态(入口压力偏低时边界层厚度较大)。

由此可见,微尺度喷流入口压力阶跃对管内流动的影响程度取决于入口压力波动与管内流体黏性力之比。当入口压力波动幅度较大时,管内流动将以强对流波动结构为主;反之,入口压力波动幅度较小时黏性力占主导,此时压力波动引起的流场变化首先表现为收缩段至喉部的物理量梯度变化,随后在扩张段,压力波动与黏性力相互制衡,导致流场边界层厚度发生变化,并最终到达稳定状态。

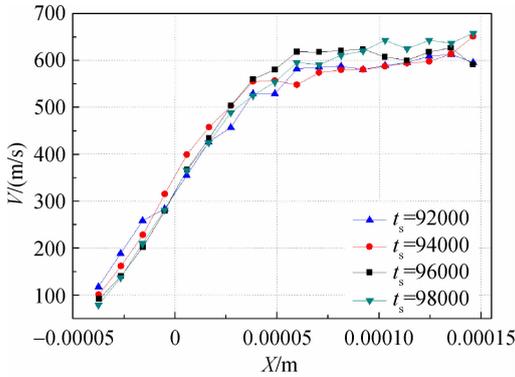
为进一步分析阶跃式增压过程中管内流动的变化状况,图 9 和图 10 给出了阶跃式增压过程内喷管中心线上的速度和压力分布情况。为更加明确的展示阶跃式增压带来的影响,图中截取了 3 次压力阶跃后每隔 7×10^{-8} s ($\Delta t_s = 2000$) 的 4 次即时计算结果进行比较。线图结果取自流场发展中的即时统计值,因而同样带有一定的统计涨落,但总体趋势仍比较明显,能够反映流动的变化特征。根据图中显示的结果,入口压力第一次阶跃时形成



(a) 第一次阶跃



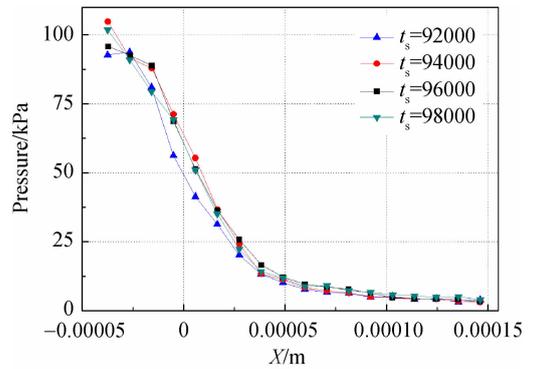
(b) 第二次阶跃



(c) 第三次阶跃

图 9 阶跃式增压过程内中心线上的速度分布

Fig. 9 Velocity distribution on the center line during the stepped supercharged process



(c) 第三次阶跃

图 10 阶跃式增压过程内中心线上压力分布

Fig. 10 Pressure distribution on the center line during the stepped supercharged process

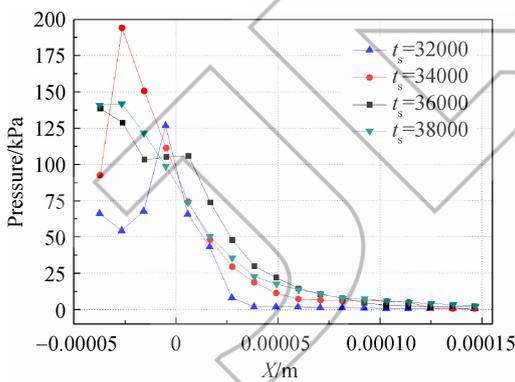
的高压差流动首先在喉部形成宽度较窄的高速波动,并随着扩张段的加速作用形成宽度更广、峰值更高的激波前锋,当高速激波流动短时间内迅速通过扩张段到达出口并对外流出后,管内流动速度下降并趋于稳定值;在管内压力变化中,初始时入口压力阶跃前管内流速偏低,导致上游大量气体聚集在收缩段至喉部形成高压区,随后高压波动进入喉部至扩张段,增大了收缩段气流在流动方向上的阻力,因此压力峰值向上游回溯,并受压缩段和入口高压的共同作用形成更高的压力峰

值,当压力波动发展到扩张段时,该处压力随之上升,而由于波动压能在扩张段逐渐释放,导致上游来流压力梯度与峰值随之下降,最终压力波动流出喷管后,压力梯度呈现出沿流动方向递减的稳定趋势。

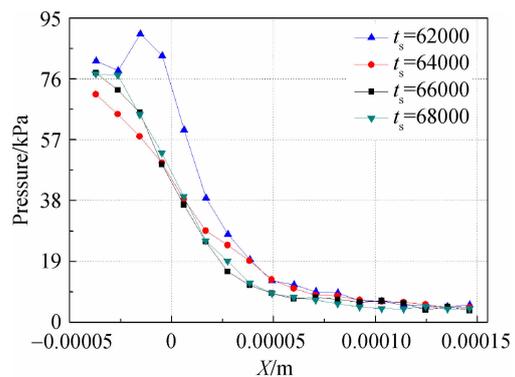
第二次阶跃时,入口压力下降,由于惯性作用,初始变化时大部分管内流速和压力还未发生明显变化,压降主要出现在接近入口的位置,该处的流动速度也随之降低;随着降压波动的继续发展,入口至喉部的流场压力和速度明显下降,但由于喉部压力下降减少了入口流动发展的阻碍力,近入口位置处的流速略有回升;当压降波动发展至扩张段时,该处的压力和速度开始降低,在其影响下,上游入口处的流动发展阻力进一步减少,从而使该处的速度和压力均继续回升;最终当压降波动发展至出口时,扩张段流速和压力均有所下降,其他位置的流场则基本不变。

第三次阶跃时入口压力的波动是三次阶跃中最低的,因此其产生的影响也相对最小。从速度上看,随着增压阶跃波动向出口方向发展,收缩段、喉部、扩张段的流动速度依次增大,最终当波动离开喷管后,流动速度逐渐下降并趋于稳定;在压力方面,增压阶跃首先使收缩段出现峰值,随后喉部压力上升导致压力峰值向入口方向回溯,增压波动发展到扩张段后该处压力升高,而上游流动压力梯度随着压能的释放而下降,最后当波动离开喷管后,压力分布逐渐趋稳,其整体变化规律与第一次阶跃有一定相似,但由于两次阶跃的入口压力相差悬殊,两者的变化幅度有明显差距。

图 11~图 14 给出了入口压力阶跃式变化过程中喷管推力、质量流量、比冲和喉部雷诺数的变化情况。为重点分析入口压力波动对微喷流特性



(a) 第一次阶跃



(b) 第二次阶跃

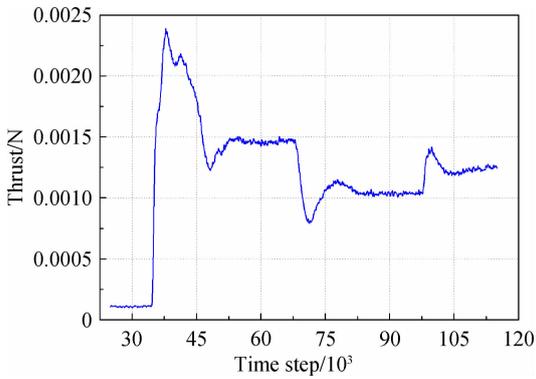


图 11 阶跃式增压过程中的推力

Fig. 11 Thrust during the stepped pressure boost process

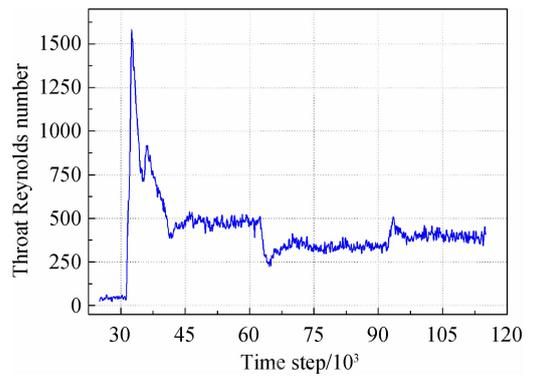


图 14 入口压力阶跃式变化过程中的喉部雷诺数

Fig. 14 Throat Reynolds number during the stepped pressure boost process

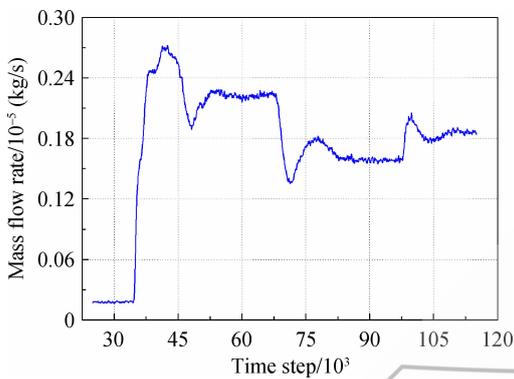


图 12 阶跃式增压过程中的质量流量

Fig. 12 Mass flow rate during the stepped supercharged process

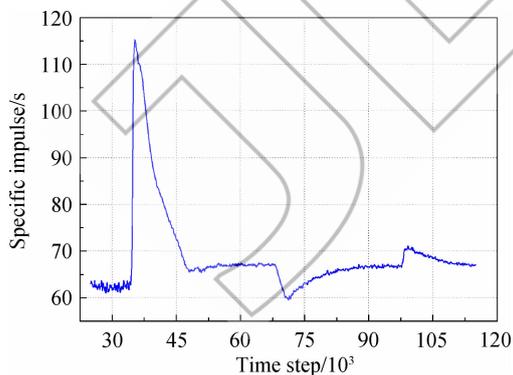


图 13 阶跃式增压过程中的比冲

Fig. 13 Specific impulse during the stepped supercharged process

减), 压力跃减反映为类余弦式波动(先减后增), 波动幅度与入口压力变化具体值呈正相关关系。从喷流发展过程来看, 喷管出口处的气体总能取决于上游流场压能的释放或缩减, 因此当入口压力发生阶跃时, 各项喷流特性参数必然随其升高或降低; 而由于喷管出口边界为恒压边界, 当入口压力恒定时, 喷管出口处的气体也将收敛于稳态。

在上述特性参数中, 推力主要与出口处的流体总能相关, 因此其变化趋势主要取决于入口压力的增减, 但该参数受气体动压和静压的共同影响, 而稳定状态下气体的局部流速又与其静压呈反相关关系, 因此推力参数的具体变化趋势呈震荡式增长或下降; 与之相比, 质量流量与速度和密度变化的关联更为紧密, 虽然其整体趋势与推力基本一致, 但第一次压力阶跃后, 出口处的气体密度大幅上升且基本稳定, 因此其后的变化幅度与阶跃前相比偏小; 比冲所反映的是单位质量的气体所产生的推动力, 总动能相同时密度更小的流体具有更大的比冲, 因此当初始流场在高增压阶跃产生的激波推动下形成低密度高速出口喷流时, 比冲值出现最高峰, 其出现时间均略早于推力和质量流量的最高峰时间, 而当出口处流场密度大幅提升后, 出口流速逐渐趋稳, 推力随之下降, 比冲值也因此迅速下降, 其后的变化幅度也相对较小; 喉部雷诺数主要反映了喷流流场内惯性力与黏性力之比, 因此其变化趋势与推力基本一致, 主要随上游压能的释放或缩减呈震荡式变化, 根据该参数的数值变化可以看出, 当喉部流场的动能由于高增压阶跃出现峰值时, 雷诺数激增, 惯性力对流动的影响迅速提高, 而随着流动的逐渐稳定, 雷诺数迅速下降, 此时黏性力对流动产生了相对更高的影响, 随后入口压力的小幅波动也没有

造成的影响, 图中主要给出了入口压力开始突变时($t_s = 30000$)至基本稳定时($t_s = 115000$)的喷流特性参数变化情况。从图中可以看出, 入口压力的阶跃式变化会给喷流各特性参数造成延时性波动, 其趋势反映为“延时-震荡-稳定”。从变化形势上看, 压力跃增反映为类正弦式波动(先增后

使雷诺数出现大幅震荡,进一步说明此时微喷流中的黏性力对入口压力波动的发展产生了重要的影响。

3.2 线性式增压

本文设置的线性式增压模型如图 15 所示,入口压力从第 1.05×10^{-6} s ($t_s = 30\ 000$) 起到第 3.15×10^{-6} s ($t_s = 90\ 000$) 止,由 10.1325 kPa 线性式变化至 101.325 kPa,其他计算条件则与阶跃式压力变化模型一致,以便对两种非恒定增压模型的喷流特性进行对比分析。

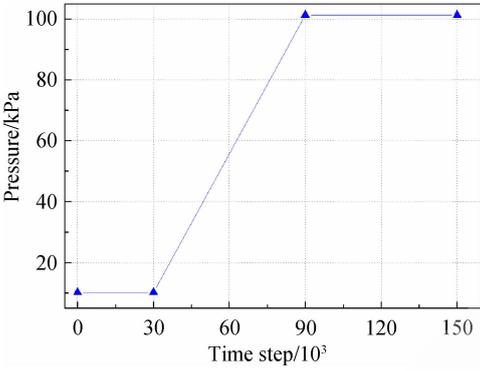
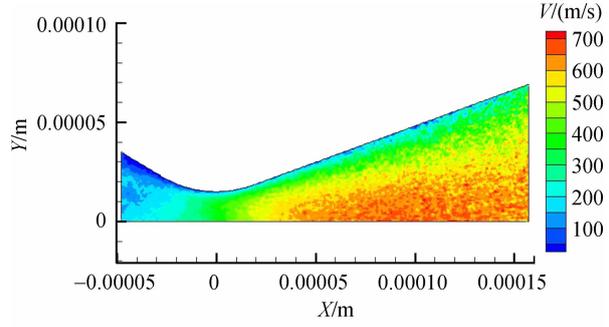


图 15 线性式增压模型

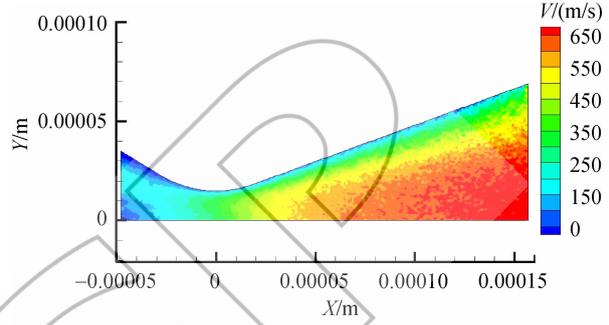
Fig. 15 Linear pressure boost mode

图 16 和图 17 给出了线性式增压过程中不同时刻的流场速度和压力云图。为反映入口压力变化对管内流动造成的持续性影响,本文将压力变化开始和终止后各 3.5×10^{-7} s ($\Delta t_s = 10\ 000$) 之间的数值结果设为取样范围,并列出了每隔 5.25×10^{-7} s ($\Delta t_s = 15\ 000$) 的即时结果,最后与稳定后的统计结果一并分析比较。由于计算尚未稳定,结果中带有了一定的统计涨落,但足以反映流动的基本变化趋势。

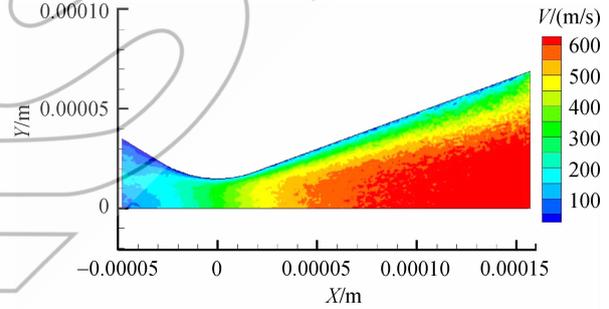
从图 16 和图 17 中结果可以看出,随着入口压力的增长,收缩段的流动压力逐渐上升,在经历了短暂的变化后其结构基本稳定;而在喉部压力不断上升和出口边界压力恒定的影响下,扩张段中的流场压力梯度随之提高,受此影响,该位置处的流动速度不断升高,管内流场的惯性力开始占主导,黏性效应对流动的影响逐渐减小,从而导致流动边界层厚度降低,高速区域不断扩张,最终发展到稳定状态。总体来看,在线性式增压的作用下,微尺度喷流变化呈明显的连续性特征,除了初始时受增压来流影响,局部位置和区域的流场出现了明显变化外,其后的流场结构都呈现出连续且稳定变化的趋势;另外,扩张段流场边界层的变



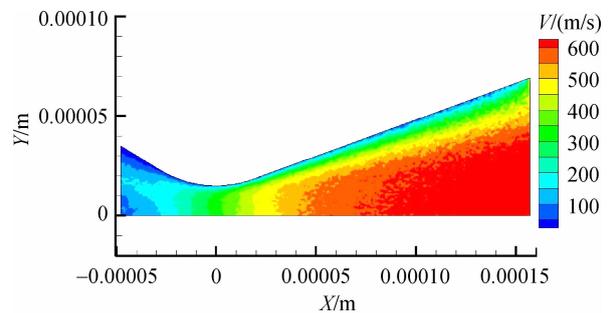
(a) 第 1.4×10^{-6} s ($t_s = 40000$)



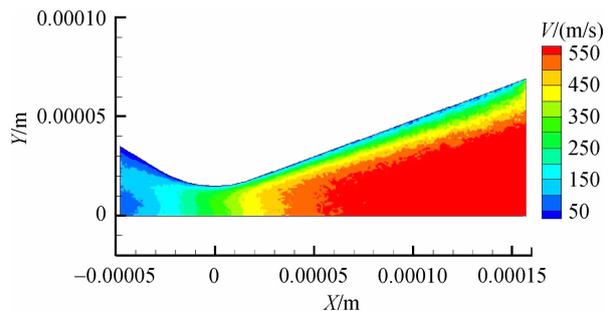
(b) 第 1.925×10^{-6} s ($t_s = 55000$)



(c) 第 2.45×10^{-6} s ($t_s = 70000$)



(d) 第 2.975×10^{-6} s ($t_s = 85000$)



(e) 第 3.5×10^{-6} s ($t_s = 100000$)

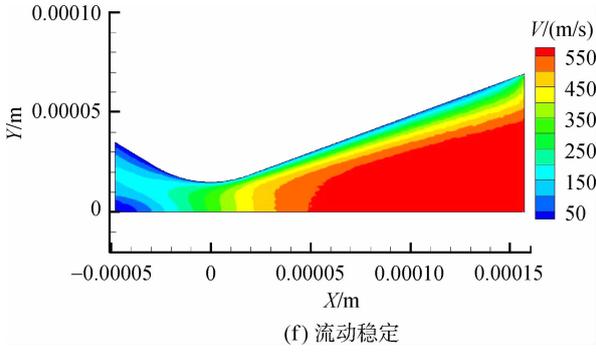


图 16 线性式增压过程中的流场速度云图

Fig. 16 Velocity of the flow field during the linear pressure boost process

化也充分反映了黏性与惯性力的相互作用对流场变化产生了显著的影响,进一步说明了黏性力在微尺度喷流中的重要影响作用。

图 18 和图 19 给出了线性式增压过程中不同时刻中心线上的流场速度和压力分布。从图中可

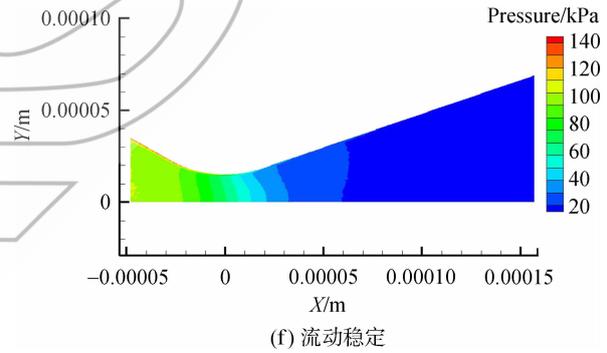
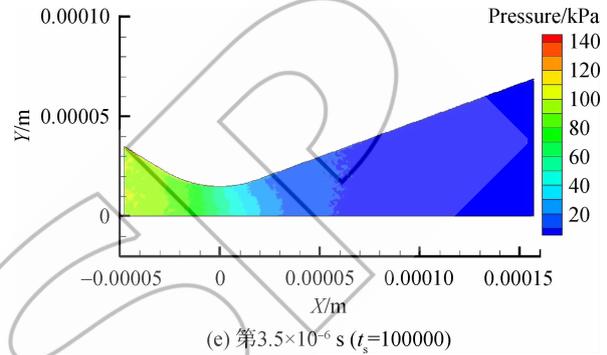
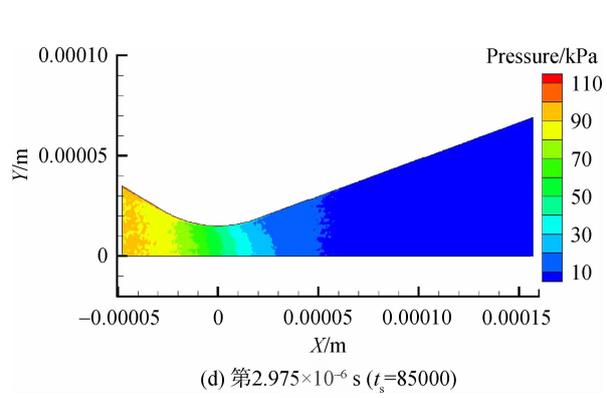


图 17 线性式增压过程中的流场压力云图

Fig. 17 Pressure of the flow field during the linear supercharged process

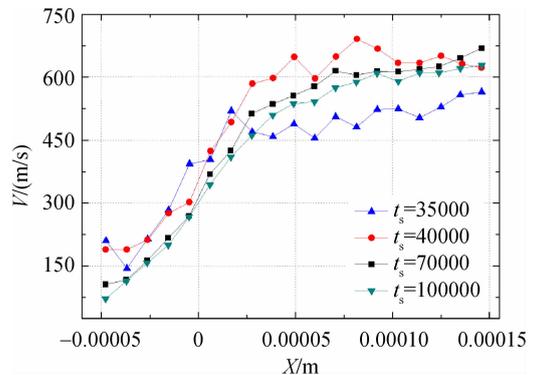
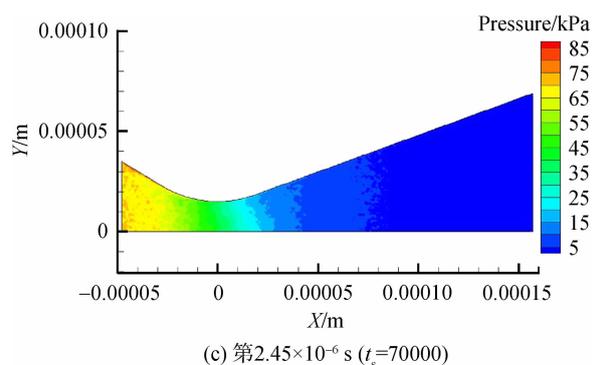
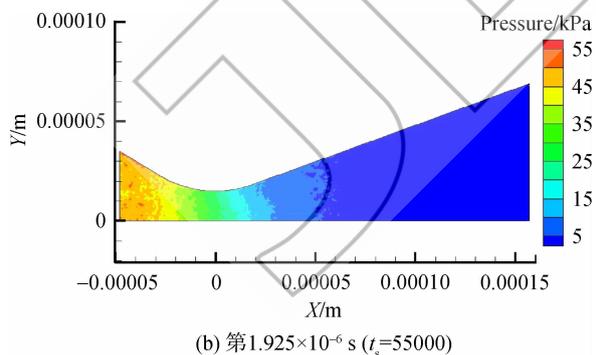
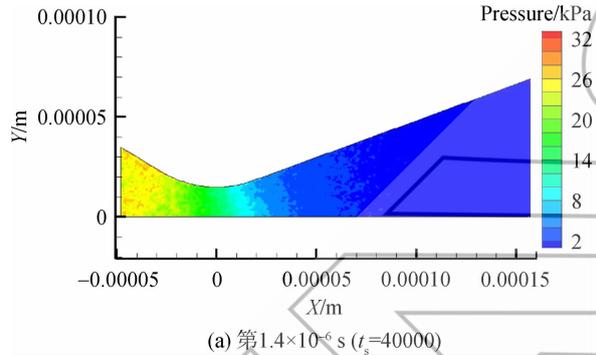


图 18 线性式增压过程内中心线上的速度分布

Fig. 18 Velocity distribution on the center line during the linear supercharged process

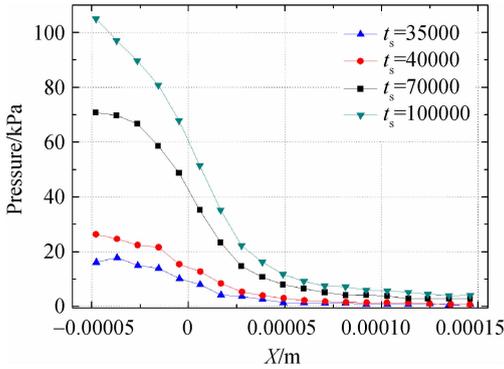


图 19 线性式增压过程内中心线上压力分布

Fig. 19 Pressure distribution on the center line during the linear supercharged process

可以看出,当喷管开始增压时,来流首先聚集在收缩段形成高压区,使该区域的流速明显增大;随着入口压力的不断提高,高压来流也在扩张段进一步加速,从而导致管内流速整体上升;当增压流动发展至出口后,加速气流离开喷管,产生了泄流效应,管内流速略有下降,并随着入口压力的恒定而趋于稳定状态。与流速相比,管内压力变化则主要表现为压力梯度的连续性变化,其顺压梯度的趋势则始终未变,其结果清晰的表明,喷流内部压力的变化主要集中在入口至喉部的收缩段,以及扩张段中接近喉口的部分,而扩张段中靠近出口的流动区域则呈现出压力梯度较低且波动较小的特点。由此可以说明,线性式增压对微尺度流动的影响以渐进式的连续性变化为主,具体表现为收缩段的压力梯度剧增和扩张段的流速变化。

图 20~图 23 给出了线性式增压过程中喷管推力、质量流量、比冲和喉部雷诺数的变化情况。同样为分析入口压力变化过程对喷流的影响,图中所给出的主要是线性式增压过程中(从 30 000~115 000 时间步)的计算结果。

从结果中可以看出,线性式增压过程中微尺度喷流的推力、质量流量和喉部雷诺数主要呈线性上升的态势,这是由于 3 种特性参数均与流动速度有着重要的关联。随着上游来流的压能不断释放,管内流动速度线性式增长,从而使上述特性参数形成了相似的变化趋势。而喷流比冲的变化则相对复杂一些,当增压来流发展至扩张段时,增压前的低密度气体在高压来流的推动下以较高的速度离开出口,导致喷流比冲出现峰值;随后由于质量流量的不断提高和出口处流动状态的变化放缓,喷流比冲缓慢下降并向稳定状态发展。此外,从喉部雷诺数的变化结果来看,喉部流动受压缩

和扩张效应的共同影响,因此该处速度随高压来流的不断发展而剧烈变化,导致喉部雷诺数出现了较大幅度的波动,但整体仍呈现出线性式上升的趋势,这表明了喉部流动的惯性力与黏性力处于相互平衡的作用中,而且随着入口压力的持续提高,惯性力的影响逐渐增加。

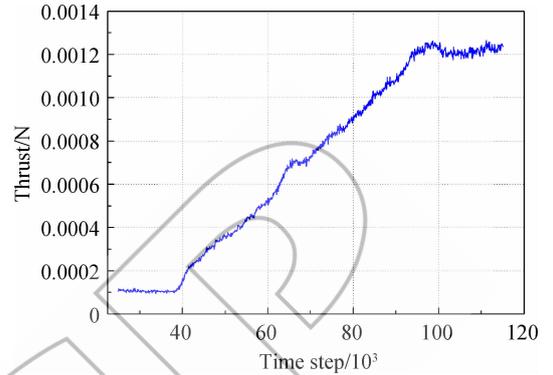


图 20 线性式增压过程中的推力

Fig. 20 Thrust during the linear supercharged process

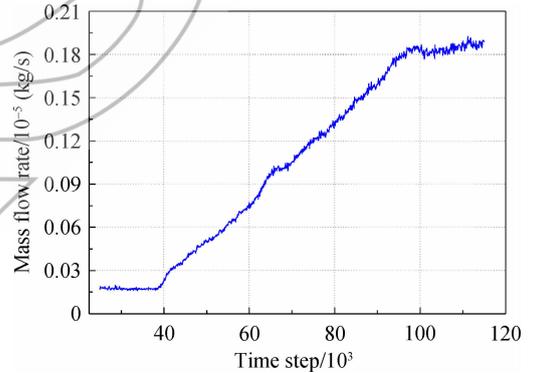


图 21 线性式增压过程中的质量流量

Fig. 21 Mass flow rate during the linear supercharged process

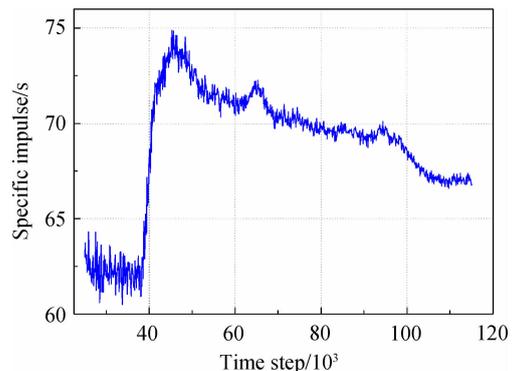


图 22 线性式增压过程中的比冲

Fig. 22 Specific impulse during the linear supercharged process

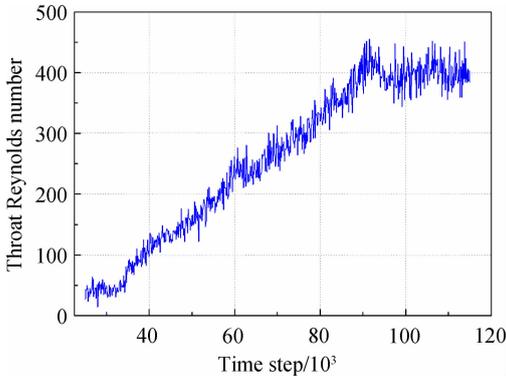


图 23 线性式增压过程中的喉部雷诺数

Fig. 23 Throat Reynolds number during the linear supercharged process

3.3 两种模式的对比分析

上文给出了两种不同的非恒定增压模式下微尺度喷流的流场及特性参数变化情况。根据结果显示,两种模型条件下喷流特性变化的主要区别为趋势差异:阶跃式模型中,喷流特性以峰谷相间的波动式变化为主,增压时先出现波峰后出现波谷,减压则相反,稳定后的特性值将出现在波峰与波谷之间;线性式模型中,喷流特性以类似于入口压力增长的连续式变化为主,除比冲呈“波峰-缓慢下降-趋于稳定”的特殊趋势外,其他各特性参数均随着入口压力的升高而线性变化。两种模式下特性参数的具体变化机理在上文中已有较详细的分析,此处不再赘述。

表 2~表 4 给出了两种模式下微尺度喷流状态切换过程中的重要特性参数值。从整体结果上看,阶跃式模型在变化过程中所产生的总冲量比线性式模型高约 59.5%,消耗的推进剂总质量多约 74.7%,单位质量工质提供的冲量低约 8.6%,平均比冲基本相等,两者相差不足 1%;从变化过程来看,阶跃式模型共经历了 3 次特性参数峰谷式波动,每次推力波动幅值占稳定值的 82.1%、36.9%、19.7%,比冲波动幅值占稳定值的 81.7%、12.0%、7.3%,质量流量波动幅值占稳定值的 39.1%、31.0%、18.0%,而线性式模型的特性参数除比冲外均呈线性增长趋势,全过程中无波峰出现,推力和质量流量的最大值基本接近于稳定值,两者相差不足 1%,比冲变化过程中出现了 1 次波峰,但波动幅度有限,其峰值与平均值相比占后者的 7.9%,与稳定值相比占后者的 11.9%;此外,两种模型的喉部雷诺数变化过程与推力和质量流量类似,但其两者波动幅度差异较大,阶跃式模型中喉部雷诺数的最大波动幅度约

为其稳定值的 2.55 倍,最低幅度也占稳定值的 40.1%,而线性式模型中喉部雷诺数呈明显的线性变化趋势,无波峰出现,最大值与稳定值相差占后者的 7%,两者基本相等。在本文的设定中,阶跃式压力的变化幅度分别为稳定值的 18.4% 和 16.1%,均控制在 20% 以内,若航天器因控制精度问题出现更高的压力变化幅度,则阶跃式模型中的波幅占比更大。由此可见,在相同的工作状态下,阶跃式模型的总推力输出相对更高,但其消耗的工质质量也更大,其单位质量推进剂的能效比线性式模型低;而在稳定性方面,线性式模型则具有更明显的优势。

表 2 两种不同模式中微尺度喷流的总体特性参数值比较

Table 2 Comparison of the general characteristics of the micro-scale jet in two different modes

喷流特性参数	阶跃式模型	线性式模型
总冲量/ 10^{-6} (mN·s)	3.51	2.20
流体总质量/ 10^{-6} mg	5.12	2.93
平均比冲/s	69.32	69.37
平均喉部雷诺数	439.62	263.15
单位质量推进工质提供的冲量/ $((\text{N} \cdot \text{s})/\text{g})$	0.686	0.751

表 3 阶跃式增压过程中微尺度喷流的重要特性值
Table 3 Important characteristics of the micro-scale jet during the stepped supercharged process

喷流特性参数	第一次阶跃	第二次阶跃	第三次阶跃	
推力/ mN	峰值	2.40	1.16	1.42
	谷值	1.21	0.78	1.17
	稳定值	1.45	1.03	1.27
比冲/s	峰值	115.67	67.38	71.25
	谷值	60.88	59.38	66.34
	稳定值	67.09	66.68	66.94
喉部 雷诺数	峰值	1607.66	414.19	510.10
	谷值	370.06	219.43	339.25
	稳定值	484.55	334.53	425.44
质量流量/ (mg/s)	峰值	2.73	1.83	2.07
	谷值	1.87	1.34	1.73
	稳定值	2.20	1.58	1.89

表 4 线性式增压过程中微尺度喷流的重要特性值

Table 4 Important characteristics of the micro-scale jet during the linear supercharged process

喷流特性参数	全过程中的最大值	稳定值	平均值
推力/mN	1.27	1.27	0.71
比冲/s	74.88	66.94	69.37
喉部雷诺数	455.24	425.44	263.15
质量流量/(mg/s)	1.90	1.89	1.04

4 结 论

本文首先验证了 DSMC 方法在模拟微尺度拉瓦尔喷管内部流动时的正确性,然后采用该方法对阶跃式增压和线性式增压模式下的微尺度喷流进行了模拟,并根据结果对两种非恒定增压条件下的微尺度喷流特性进行了对比分析,得出以下结论:

1) 当微尺度喷流进行增压状态切换时,阶跃式增压和线性式增压对管内流场造成的影响有显著区别。阶跃式增压会使流动特性出现峰谷式波动;而线性式增压流动则表现出较为明显的连续性变化,这表明了其入口增压模式对管内流动的变化趋势会产生主导性的影响。

2) 微尺度喷流中的黏性效应对其入口压力变化引起的流场波动有重要的阻滞作用,这一特点在喉部扩张段至出口处的流场中最为明显。根据模拟结果,两种非恒定增压模式下的流场边界层仅在高压来流发展初期才会呈现出明显的结构改变,喉部雷诺数除阶跃式模型的第一次高压波动外其余均在 500 以下,增压过程中喷管中心线上的流动变化主要体现为边界层厚度的消长,由此表明了黏性力对微尺度喷流的重要影响。

3) 根据本文的研究结果,即使微尺度喷流入口增压的起始状态、稳定状态和增压时间完全一致,不同增压模式下的喷流特性也有较大差别。在本文设定的条件下,阶跃式模型在变化过程中产生的总冲量和消耗的总推进剂质量比线性式模型高约 59.5% 和 74.7%,单位工质提供的冲量低约 8.6%,平均比冲基本相等,其波动性远高于线性式模型。由此可见,阶跃式增压适用于系统需要较大推动力以改变其运动状态且推进剂储备量充足的情况,而当系统进行运动状态的精确微调或需要推进剂释放更高效能时,稳定性更高的线

性式增压无疑具有更明显的优势。

参考文献:

- [1] ROTHE D E. Electron-beam studies of viscous flow in supersonic nozzles[J]. AIAA Journal, 1971, 9(5): 804-811.
- [2] GRISNIK S, SMITH T. Experimental study of low Reynolds number nozzles[R]. AIAA-87-0992, 1987.
- [3] LEWIS D H, Jr, JANSON S W, COHEN R B, et al. Digital micropropulsion[J]. Sensors and Actuators: A Physical, 2000, 80(2): 143-154.
- [4] BAYT R, BREUER K. Design and performance of hot and cold supersonic microjets[R]. AIAA-2001-0721, 2001.
- [5] ALEXEENKO A A, LEVIN D A, GIMELSHIN S F, et al. Numerical modeling of axisymmetric and three-dimensional flows in microelectromechanical systems nozzles[J]. AIAA Journal, 2002, 40(5): 897-904.
- [6] WANG M R, LI Z X. Numerical simulations on performance of MEMS-based nozzles at moderate or low temperatures[J]. Microfluidics and Nanofluidics, 2004, 1(1): 62-70.
- [7] TITOV E, GALLAGHER-ROGERS A, LEVIN D, et al. Examination of a collision-limiter direct simulation Monte Carlo method for micro propulsion applications[J]. Journal of Propulsion and Power, 2008, 24(2): 311-321.
- [8] RANJAN R, KARTHIKEYAN K, RIAZ F, et al. Cold gas propulsion microthruster for feed gas utilization in micro satellites[J]. Applied Energy, 2018, 220(6): 921-933.
- [9] RAFI K M, DEEPU M, RAJESH G. Effect of heat transfer and geometry on micro-thruster performance[J]. International Journal of Thermal Sciences, 2019, 146(12): 1-13.
- [10] CAI G, ZHENG H, LIU L, et al. Three-dimensional particle simulation of ion thruster plume impingement[J]. Acta Astronautica, 2018, 151(10): 645-654.
- [11] 张先锋. 微尺度流动及强化混合技术的研究[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2007.
ZHANG Xianfeng. Study on flow and mixing technique in microfluidic systems[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2007. (in Chinese)
- [12] 刘赵森, 张谭. Laval 型微喷管内气体流动的计算及分析[J]. 航空动力学报, 2009, 24(7): 1556-1563.
LIU Zhaomiao, ZHANG Tan. Numerical investigation on gas flow in Laval micronozzle[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(7): 1556-1563. (in Chinese)
- [13] 刘赵森, 张谭, 逢燕. 喉部形状设计对微喷管内流动及性能的影响[J]. 航空动力学报, 2010, 25(10): 2279-2284.
LIU Zhaomiao, ZHANG Tan, PANG Yan. Effects of throat shape design on propulsion performance of micronozzles[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(10): 2279-2284. (in Chinese)
- [14] 杨海威, 朱卫兵, 赵阳. 基于分子运动模拟的微喷管流体流动[J]. 航空动力学报, 2009, 24(10): 2189-2192.
YANG Haiwei, ZHU Weibin, ZHAO Yang. Micronozzle flow based on simulation of molecule movement[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(10): 2189-2192. (in Chi-

- nese)
- [15] 张赛文. 基于 NS/DSMC 耦合算法的喷管跨流域流动模拟[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2018.
ZHANG Saiwen. Nozzle trans-regime flow simulation based on N-S/DSMC coupling algorithm[D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2018. (in Chinese)
- [16] KETSDEVER A, MUELLER J. Systems considerations and design options for microspacecraft propulsion systems[R]. AIAA-99-2723, 1999.
- [17] MUELLER J. Thruster options for microspacecraft: A review and evaluation of existing hardware and emerging technologies[R]. AIAA-97-3058, 1997.
- [18] 贾永刚. 微推进技术及研究发展现状[C]//中国宇航学会固体火箭推进第22届年会论文集(发动机分册). 成都: 中国宇航学会, 2005: 249-255.
- [19] 李哈. 微推进器的制备及其性能研究[D]. 安徽 芜湖: 安徽工程大学, 2015.
LI Han. Research on fabrication and performance for micro-thruster[D]. Wuhu, Anhui: Anhui Polytechnic University, 2015. (in Chinese)
- [20] 郑志远, 高华, 樊振军, 等. 激光等离子体推进技术研究新进展[J]. 科技导报, 2012, 30(28/29): 103-107.
ZHENG Zhiyuan, GAO Hua, FAN Zhenjun, et al. Developments of laser plasma propulsion technology[J]. Science and Technology Review, 2012, 30(28/29): 103-107. (in Chinese)
- [21] BIRD G A. Molecular gas dynamics and direct simulation of gas flow[M]. Oxford, Britain: Clarendon Press, 1994.
- [22] WAGNER W. A convergence proof for Bird's direct simulation Monte Carlo method for the Boltzmann equation[J]. Journal of Statistical Physics, 1992, 66(3/4): 1011-1044.
- [23] PULVIRENTI M, WAGNER W, ZAVELANI ROSSI M B. Convergence of particle schemes for the Boltzmann equation[J]. European Journal of Mechanics: B Fluids, 1994, 13(3): 339-351.

(编辑: 张 雪)